

TÓPICOS DE
ANÁLISE E TOPOLOGIA
EM VARIEDADES

Armando Machado

UNIVERSIDADE DE LISBOA
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática
1997

Classificação A.M.S. (1991): 58-01

ISBN: 972-8394-07-1

ÍNDICE

Introdução	v
Capítulo I. Medida e Integração em Variedades	1
§1. Medida de Lebesgue sobre os espaços euclidianos	1
§2. Medida de Lebesgue sobre as variedades	6
§3. Teoremas de Fubini e da mudança de variáveis	13
§4. Coordenadas polares generalizadas e medidas das esferas	18
§5. Teorema de Sard	21
Exercícios	27
Capítulo II. Tópicos de Álgebra Multilinear	37
§1. Relações entre espaços vectoriais reais e complexos	37
§2. Espaços de aplicações multilineares	39
§3. Grupo simétrico e sinal de uma permutação	45
§4. Aplicações multilineares alternadas. O determinante	48
§5. Produto exterior	57
§6. Produto interior	64
§7. Orientação de espaços vectoriais reais	67
§8. Elemento de volume e operadores *	79
Exercícios	88
Capítulo III. Formas Diferenciais e Teorema de Stokes	99
§1. Campos tensoriais e formas diferenciais	99
§2. Derivada exterior duma forma diferencial	107
§3. Derivada de Lie duma forma diferencial	120
§4. Integral duma forma diferencial	130
§5. Teorema de Stokes	133
§6. Versões clássicas do teorema de Stokes	140
§7. Operador prismático e lema de Poincaré	143
§8. Aplicação à demonstração de resultados topológicos	149
§9. Teorema de Stokes singular. Ângulo sólido orientado	156
Exercícios	170
Capítulo IV. Introdução à cohomologia de de Rham	195
§1. Cohomologia de de Rham	195
§2. Produtos e somas de complexos de cocadeias	202
§3. Sucessão exacta de Mayer-Vietoris	213
§4. Cohomologia com suporte compacto	225
§5. Dualidade de Poincaré	234
§6. Aplicação à demonstração de resultados topológicos	251
§7. Invariância topológica da cohomologia	261
Exercícios	268

Índice de Símbolos
Índice Remissivo
Bibliografía

293
297
301

INTRODUÇÃO

Este texto teve a sua origem num curso semestral de Análise em Variedades destinado aos estudantes do último ano da licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Uma versão anterior foi publicada nos Textos e Notas do CMAF em dois volumes há cerca de vinte anos ([13]) mas sucessivas mudanças na organização do curso e na sensibilidade do autor conduziram à necessidade de uma reformulação de quase todos os assuntos.

De certo modo, o texto constitui uma sequência do livro [10], do qual retoma as notações e a filosofia: As variedades estudadas são sempre “variedades concretas”, ou seja, subvariedades de um certo espaço vectorial de dimensão finita. Como então, a razão por que nos limitamos ao estudo destas está no desejo de chegarmos tão depressa quanto possível aos resultados interessantes, sem perder tempo com definições e resultados que, apesar de triviais, demoram a explicar e são, por vezes, frustrantes. Temos ainda em conta que este texto se destina também a estudantes cuja área principal de interesse não é a Geometria e que poderiam ser desencorajados por um tratamento desde o início demasiado abstracto; o ponto de vista que, para estes, queremos sublinhar é o de que a Geometria pode ser olhada, em parte, como o estudo da Análise no quadro dos conjuntos não abertos.

É claro que um estudante não deve terminar a licenciatura em Matemática, especialmente se os seus interesses se centrarem na área da Geometria, sem saber o que é uma variedade abstracta, quais os exemplos fundamentais desta importante estrutura e como, no quadro destas, se generaliza a Geometria Clássica; trata-se de uma noção fundamental em muitos ramos da Matemática contemporânea, que é impossível ignorar. Se é verdade que, na estrutura actual da licenciatura em Matemática é sem dúvida na disciplina em que este curso se baseia que essa noção deve ser abordada, pensamos que isso pode ser feito de forma paralela ao desenvolvimento fundamental do curso, dando em cada caso indicações sumárias sobre o modo como as noções apresentadas no quadro concreto podem ser adaptadas ao quadro abstracto. De qualquer modo, somos de opinião que a abordagem, mesmo que resumida, do conceito de variedade abstracta iria prejudicar a coerência interna deste texto, pelo que preferimos apresentá-la noutra lugar.

No primeiro capítulo abordamos o estudo da medida de Lebesgue sobre as variedades contidas num espaço euclidiano. Colocamo-nos, para isso, no quadro da integração em espaços de medida abstracta, tal como pode ser encontrada, por exemplo, nos livros de Rudin [16] ou Lang [9] ou no texto [11] do autor. Supomos, em particular, conhecida a medida de Lebesgue nos borelianos de \mathbb{R}^n , incluindo a fórmula de integração por mudança de variáveis, e passamos daí, primeiro, de forma trivial, para os borelianos de um espaço euclidiano

(independência da escolha da base ortonormada) e depois para os borelianos de uma subvariedade de um espaço euclidiano. Para estes últimos começamos por examinar o que se passa com os borelianos pequenos, essencialmente os que estão contidos no domínio de uma carta, e partimos daí para os borelianos gerais, tendo em conta o facto de cada um destes ser união de uma família numerável de borelianos pequenos disjuntos dois a dois. Ao contrário do que se faz usualmente no quadro da medida como funcional, ou quando se define directamente o integral numa forma diferencial, as partições da unidade não jogam aqui nenhum papel. Examinamos em seguida o modo como o teorema de Fubini e a mudança de variáveis se comportam no quadro da medida de Lebesgue sobre as variedades e sublinhamos, a propósito, que o quadro natural para as coordenadas esféricas em dimensão maior ou igual a 3 parece ser o de duas coordenadas, uma real e outra, generalizada, com valores na hipersuperfície esférica unitária. Terminamos o capítulo com uma demonstração do teorema de Sard baseada na apresentada por Milnor em [15]. Esse teorema tem muitas aplicações importantes em Geometria e vai ser utilizado, em particular, no terceiro e quarto capítulos.

No segundo capítulo examinamos os resultados de Álgebra Multilinear que são essenciais para o estudo posterior das formas diferenciais. Supomos, naturalmente, que o leitor tem os conhecimentos básicos de Álgebra Linear que se aprendem normalmente ao nível do primeiro ano da licenciatura, incluindo o estudo das matrizes e respectivos determinantes e as propriedades básicas dos espaços vectoriais com produto interno. Se num ou noutro caso, como a propósito do sinal de uma permutação ou na discussão da orientação de um espaço vectorial real, retomamos questões que se poderiam considerar conhecidas, isso deve-se ao desejo de conservar alguma coerência num assunto que temos necessidade de examinar um pouco mais profundamente. Todas as secções deste capítulo são essenciais para o que se segue, com a possível excepção da que se debruça sobre o produto interior, cujos casos de utilização podem normalmente ser substituídos por argumentos *ad hoc* simples.

O terceiro capítulo constitui a parte central deste texto. As formas diferenciais aparecem essencialmente como funções com valores em espaços de aplicações multilineares alternadas e na definição do conceito de suavidade e do operador de diferenciação exterior tira-se partido de modo essencial do espaço vectorial ambiente, através da utilização de prolongamentos das formas diferenciais, que são aplicações com valores em espaços vectoriais fixados. Por exemplo, o diferencial exterior é definido a partir do antissimetrizado da derivada usual de um prolongamento e não por colagem de definições locais nos domínios das cartas, a resolução do problema da independência do prolongamento sendo resolvida através da fórmula alternativa que utiliza campos vectoriais e os respectivos parênteses de Lie. A derivada de Lie de uma forma diferencial na direcção de um campo vectorial é definida no mesmo espírito, apesar de não ser posteriormente utilizada neste trabalho. O integral de uma forma diferencial de grau n sobre uma variedade orientada com a mesma dimensão é definida, utilizando um produto interno auxiliar no espaço ambiente, como o integral, para a medida de Lebesgue sobre a variedade, da componente da forma

diferencial no elemento de volume, o facto de este integral não depender do produto interno considerado aparecendo então como uma consequência particular da invariância do integral pelas imagens recíprocas. Provamos, em seguida, o teorema de Stokes para as formas diferenciais, por redução, como é usual, ao teorema fundamental do Cálculo Integral, via mudança de variáveis e um argumento de partição da unidade, e mostra-se como resultados clássicos do Cálculo Vectorial podem ser obtidos a partir de casos particulares do teorema de Stokes. O operado prismático é definido, mais uma vez, de modo global, tirando partido do espaço vectorial ambiente, e é utilizado em seguida na demonstração do lema de Poincaré. Referem-se ainda as aplicações clássicas do teorema de Stokes à demonstração de resultados topológicos, como o teorema do ponto fixo de Brouwer, o teorema da inexistência de retracção da bola sobre a esfera e o teorema da esfera despenteada, estabelecendo-se, em particular, os teoremas de aproximação de aplicações contínuas por aplicações suaves, que permitem passar das versões suaves para as versões contínuas dos resultados referidos. Enuncia-se, enfim, o teorema de Stokes singular, consequência trivial do teorema de Stokes original, e aplica-se este resultado ao exame da noção de ângulo sólido orientado, com aplicações à teoria do grau.

O quarto capítulo retoma o estudo das formas diferenciais, sob o ponto de vista da Álgebra Homológica, e constitui uma introdução ao estudo da cohomologia de de Rham das variedades. O lema de Poincaré, estudado no terceiro capítulo, exprime que, numa variedade contráctil, as formas diferenciais exactas são exactamente aquelas que são fechadas. Os espaços de cohomologia de de Rham, que medem o “grau de falsidade” deste resultado no caso de uma variedade arbitrária, são introduzidos na primeira secção, bem como as respectivas propriedades de functorialidade, enquadrados numa primeira aproximação aos conceitos básicos da Álgebra Homológica, e são demonstradas algumas propriedades elementares, em particular as que relacionam a cohomologia de grau 0 com as componentes conexas da variedade. Na secção 2 é estudada a compatibilidade da cohomologia dos complexos de cocadeias com os produtos e as somas, depois de apresentar uma definição geral destes, no espírito da Teoria das Categorias mas sem recorrer explicitamente a esta, destinada a evitar referências repetitivas às múltiplas identificações necessárias. Como aplicação, mostra-se que a cohomologia de uma variedade, união disjunta de uma família de abertos, vai ser um produto das cohomologias desses abertos, o que, quando se toma como abertos as componentes conexas da variedade, permite reduzir o cálculo dos espaços de cohomologia ao caso particular das variedades conexas. Na secção 3, depois de introduzir mais um resultado geral de Álgebra Homológica, o lema da serpente, é estudada a sucessão exacta de Mayer-Vietoris, que permite efectuar os primeiros cálculos explícitos de espaços de cohomologia não triviais, nomeadamente os das esferas $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Na secção 4 são estudadas as formas diferenciais com suporte compacto bem como a versão da cohomologia de de Rham a elas associada, versão que se revela extremamente importante para o estudo das variedades não compactas, mas que também é útil, como instrumento auxiliar, mesmo quando o objectivo do estudo se centra nas variedades compactas. Tendo em vista aplicações posteriores é

calculada explicitamente a cohomologia de de Rham com suporte compacto dos espaços \mathbb{R}^n e, mais geralmente, dos produtos de intervalos abertos. Na secção 5 é estudado o teorema de dualidade de Poincaré, que mostra que cada espaço de cohomologia de de Rham de uma variedade de dimensão m , orientada e sem bordo, é isomorfo ao dual do espaço de cohomologia com suporte compacto, de grau complementar. A técnica de demonstração que seguimos é a que encontramos em [7] e baseia-se num lema “algo misterioso”, mas que se revela útil em muitas aplicações. Como instrumentos auxiliares, é estudado um resultado importante de Álgebra Homológica, o lema dos cinco, a cohomologia com suporte compacto de uma variedade, união disjunta de subconjuntos abertos, é identificada como uma soma das cohomologias com suporte compacto desses abertos e é estudada uma versão da sucessão exacta de Mayer-Vietoris para os espaços de cohomologia com suporte compacto. Entre as outras aplicações do lema atrás referido, que temos pena de não ter tido possibilidade de apresentar, citamos o teorema de de Rham, que relaciona a cohomologia de de Rham de uma variedade com o dual da sua homologia singular, uma noção do âmbito da Topologia Algébrica, assim como o teorema de Künneth, que permite estudar a cohomologia de um produto de variedades; a primeira ter-nos-ia exigido um estudo prévio dos conceitos básicos da Homologia Singular e a segunda imporia um estudo da noção geral de produto tensorial, em ambos os casos aumentando a dimensão deste trabalho para além do que estava nos nossos planos. Na secção 6 aplicam-se os resultados anteriormente obtidos, em particular os que respeitam à cohomologia com suporte compacto, à demonstração de resultados importantes de natureza topológica como o teorema de Jordan-Brouwer e o teorema de Brouwer da invariância do domínio. Por fim, na secção 7, utilizando as vizinhanças tubulares das variedades compactas sem bordo e, mais geralmente dos subconjuntos compactos de uma variedade sem bordo, assim como técnicas de aproximação de aplicações contínuas por aplicações suaves, é estabelecida a invariância topológica da cohomologia de de Rham das variedades compactas sem bordo. A invariância topológica no quadro mais geral, que não estudamos aqui, poderia ser obtida com técnicas de aproximação mais elaboradas (cf., por exemplo, [8]) ou, alternativamente, através do estudo do teorema de de Rham.

No fim de cada capítulo é proposta uma lista mais ou menos longa de exercícios, destinados a testar a compreensão dos assuntos estudados e a apresentar outros que complementam aqueles.

CAPÍTULO I

Medida e Integração em Variedades

§1. Medida de Lebesgue sobre os espaços euclidianos.

Neste capítulo vamos supor conhecida a noção de medida positiva sobre uma σ -álgebra de partes dum certo conjunto, assim como as propriedades gerais de tais medidas e dos integrais correspondentes. De um modo geral, as σ -álgebras que utilizaremos serão as σ -álgebras dos borelianos de espaços topológicos. Vamos relembra especialmente os dois resultados seguintes, que serão utilizados inúmeras vezes ao longo do capítulo:

I.1.1 Sejam X um espaço topológico, μ uma medida definida nos borelianos de X e $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ uma função mensurável, que permitimos possa tomar o valor $+\infty$. Fica então definida uma nova medida μ_f nos borelianos de X , pela fórmula

$$\mu_f(A) = \int_A f(x) d\mu(x).$$

Além disso, para cada função mensurável $g: X \rightarrow [0, +\infty]$,

$$\int_X g(x) d\mu_f(x) = \int_X g(x)f(x) d\mu(x),$$

uma fórmula idêntica sendo válida, no caso em que a função f toma valores em $[0, +\infty[$ e a função g é integrável e toma valores em \mathbb{R} ou, mais geralmente, num espaço vectorial E de dimensão finita.

I.1.2 (**Teorema trivial de mudança de variáveis**) Sejam X e \widehat{X} espaços topológicos e μ e $\widehat{\mu}$ medidas definidas nos borelianos de X e de \widehat{X} , respectivamente. Seja $\varphi: X \rightarrow \widehat{X}$ um homeomorfismo compatível com as medidas, no sentido que, para cada boreliano $A \subset X$, se tenha $\widehat{\mu}(\varphi(A)) = \mu(A)$. Para cada função mensurável $g: \widehat{X} \rightarrow [0, +\infty]$, tem-se então

$$\int_{\widehat{X}} g(y) d\widehat{\mu}(y) = \int_X g(\varphi(x)) d\mu(x),$$

uma fórmula idêntica sendo válida no caso em que a função g é integrável e toma valores em \mathbb{R} ou, mais geralmente, num espaço vectorial E de dimensão finita.

Vamos também supor conhecidas as propriedades gerais da medida de Lebesgue μ_n , definida nos borelianos de \mathbb{R}^n , em particular, os resultados que enunciamos em seguida, sobre a mudança de variáveis:

I.1.3 Suponhamos que $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Notamos então c_ξ o valor absoluto do determinante da matriz de ξ na base canónica de \mathbb{R}^n , e dizemos que c_ξ é o *coeficiente de dilatação* do isomorfismo ξ . Esta designação é justificada pelo facto de, para cada boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$, ter-se

$$\mu_n(\xi(A)) = c_\xi \mu_n(A).$$

Repare-se que, como se reconhece imediatamente, é suave a aplicação de $L_{iso}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ em $]0, +\infty[$, que a cada ξ associa c_ξ .

I.1.4 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos e $\varphi: U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 . Para cada $x \in U$, tem-se então que $D\varphi_x$ é um isomorfismo de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}^n , que vai ter um coeficiente de dilatação $c_{D\varphi(x)}$, e ficamos portanto com uma aplicação contínua de U em $]0, +\infty[$, que a cada x associa $c_{D\varphi(x)}$. Tem-se então, para cada boreliano $A \subset U$,

$$\mu_n(\varphi(A)) = \int_A c_{D\varphi(x)} d\mu_n(x).$$

I.1.5 Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ dois abertos e $\varphi: U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 . Para cada aplicação mensurável $g: V \rightarrow [0, +\infty]$, tem-se então

$$\int_V g(y) d\mu_n(y) = \int_U g(\varphi(x)) c_{D\varphi(x)} d\mu_n(x),$$

a mesma fórmula sendo válida no caso em que g é uma função integrável com valores em \mathbb{R} ou, mais geralmente, num espaço vectorial E de dimensão finita.

Repare-se que I.1.5 se pode deduzir muito facilmente a partir de I.1.4, por utilização dos resultados I.1.1 e I.1.2 enunciados atrás. Com efeito, podemos definir uma medida μ' nos borelianos de U , pondo $\mu'(A) = \mu_n(\varphi(A))$, tendo-se então que $\varphi: U \rightarrow V$ é automaticamente um homeomorfismo compatível, quando se considera em U a medida μ' e em V a medida μ_n . Resulta então de I.1.4 que μ' é também a medida definida pela função mensurável positiva $x \mapsto c_{D\varphi(x)}$. A igualdade de I.1.5 resulta então de que ambos os membros são iguais a $\int_U g(\varphi(x)) d\mu'(x)$. Um raciocínio deste tipo vai ser repetido em várias situações ao longo deste capítulo.

Seja E um espaço vectorial de dimensão n . Sabemos que E tem uma topologia canónica, a saber, a associada a qualquer das suas normas, pelo que faz sentido falar dos borelianos de E . Além disso, se $\xi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, então ξ é também um homeomorfismo, pelo que um conjunto $A \subset E$ é boreliano se, e só se, $\xi(A)$ é um boreliano de \mathbb{R}^n . Uma

tentativa natural para definir uma medida de Lebesgue μ_E , nos borelianos de E , seria a de pôr $\mu_E(A) = \mu_n(\xi(A))$, mas uma tal tentativa não resulta, uma vez que o segundo membro da igualdade anterior dependerá, em geral, do isomorfismo ξ escolhido. Para definir uma medida de Lebesgue nos borelianos de E , vamos ser obrigados a fixar em E uma estrutura suplementar, a saber, um produto interno (para medir é necessário uma régua...), por outras palavras, vamos supor que E é um espaço euclidiano. Note-se que, quando considerarmos \mathbb{R}^n como espaço euclidiano, estará implícito, salvo aviso em contrário, que o produto interno considerado é o canónico, isto é, aquele para o qual a base canónica é ortonormada.

I.1.6 (**Lema**) Se $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo ortogonal, então $c_\xi = 1$.

Dem: Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ a bola fechada de centro 0 e raio 1. O facto de B ser um conjunto compacto, de interior não vazio, implica que $\mu_n(B)$ é finito e não nulo. Uma vez que $\xi(B) = B$, donde $\mu_n(B) = c_\xi \mu_n(B)$, concluímos que $c_\xi = 1$. Alternativamente, pode-se também notar que a matriz de ξ na base canónica de \mathbb{R}^n é uma matriz ortogonal, portanto com determinante igual a 1 ou -1 . \square

I.1.7 Sejam E um espaço euclidiano e $\xi, \eta: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dois isomorfismos ortogonais. Para cada boreliano $A \subset E$ tem-se então $\mu_n(\xi(A)) = \mu_n(\eta(A))$, pelo que fica bem definida uma medida μ_E , nos borelianos de E , a que chamaremos *medida de Lebesgue sobre E* , pela igualdade $\mu_E(A) = \mu_n(\xi(A))$, onde $\xi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo ortogonal arbitrário. Em particular, escolhendo para ξ o isomorfismo idêntico de \mathbb{R}^n , vemos que a medida de Lebesgue do espaço euclidiano \mathbb{R}^n é precisamente μ_n .

Dem: É uma consequência imediata do facto de se ter $\eta(A) = \eta \circ \xi^{-1}(\xi(A))$, onde $\eta \circ \xi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo ortogonal. \square

I.1.8 No caso em que E é um espaço vectorial de dimensão 0 (com o único produto interno possível!), definimos a medida de Lebesgue sobre E , como sendo a medida de contagem, isto é, a definida por $\mu_E(\emptyset) = 0$ e $\mu_E(\{0\}) = 1$. Esta definição pode ser olhada como um caso particular da definição geral precedente, por quem não sinta vertigens ao tentar descobrir o que é a medida de Lebesgue em \mathbb{R}^0 .

I.1.9 Sejam E e F espaços euclidianos e $\xi: E \rightarrow F$ um isomorfismo. Existe então um, e um só, número real $c_\xi > 0$ (a que chamaremos *coeficiente de dilatação* de ξ), tal que, para cada boreliano $A \subset E$, $\mu_F(\xi(A)) = c_\xi \mu_E(A)$. Esse número real pode ser obtido do seguinte modo: Escolhem-se isomorfismos ortogonais $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta: F \rightarrow \mathbb{R}^n$, e então c_ξ é então o coeficiente de dilatação do isomorfismo $\beta \circ \xi \circ \alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Dem: A unicidade de um real c_ξ , verificando a condição do enunciado, é uma consequência trivial de existirem em E borelianos de medida finita e não nula (uma vez que existem em \mathbb{R}^n). Quanto à existência de c_ξ naquelas condições, basta fixarmos isomorfismos ortogonais $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ e

$\beta: F \rightarrow \mathbb{R}^n$, e verificar, o que é trivial, que o coeficiente de dilatação do isomorfismo $\beta \circ \xi \circ \alpha^{-1}$, de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}^n , verifica as referidas condições. \square

I.1.10 Sejam E, F e G espaços euclidianos. Tem-se então:

- a) Se $\xi: E \rightarrow F$ é um isomorfismo ortogonal, então $c_\xi = 1$, em particular, o coeficiente de dilatação de $Id_E: E \rightarrow E$ é igual a 1;
- b) Se $\xi: E \rightarrow F$ e $\eta: F \rightarrow G$ são isomorfismos, então $c_{\eta \circ \xi} = c_\eta c_\xi$;
- c) Se $\xi: E \rightarrow F$ é um isomorfismo, então $c_{\xi^{-1}} = 1/c_\xi$.

Dem: A alínea a) resulta de que, se $\xi: E \rightarrow F$ é um isomorfismo ortogonal, então, escolhendo isomorfismos ortogonais $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta: F \rightarrow \mathbb{R}^n$, o isomorfismo $\beta \circ \xi \circ \alpha^{-1}$, de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}^n , é também ortogonal. Quanto à alínea b), escolhemos em E um boreliano de medida finita e não nula (tais conjuntos existem em \mathbb{R}^m , e portanto também em E), e notamos que

$$c_{\eta \circ \xi} \mu_E(A) = \mu_G(\eta(\xi(A))) = c_\eta \mu_F(\xi(A)) = c_\eta c_\xi \mu_E(A).$$

donde $c_{\eta \circ \xi} = c_\eta c_\xi$. A alínea c) resulta imediatamente das alíneas a) e b). \square

I.1.11 Se E e F são espaços euclidianos, podemos considerar no espaço vectorial $E \times F$ um produto interno, definido por

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle.$$

Salvo aviso em contrário, será este o produto interno que se considera em $E \times F$, quando se olha para este espaço como espaço euclidiano. Observe-se que, quando se identifica o produto cartesiano $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^{m+n} , da maneira usual, o produto interno canónico de \mathbb{R}^{m+n} é precisamente o associado aos produtos internos de \mathbb{R}^m e de \mathbb{R}^n .

I.1.12 Se E e F são espaços euclidianos, então a medida de Lebesgue $\mu_{E \times F}$, nos borelianos de $E \times F$, é a medida produto das medidas μ_E e μ_F .

Dem: Uma vez que E e F , com as medidas de Lebesgue, μ_E e μ_F , nos respectivos borelianos, são espaços de medida σ -finitos (por isso acontecer aos espaços \mathbb{R}^n), tudo o que temos que verificar é que, quaisquer que sejam os borelianos $A \subset E$ e $B \subset F$, tem-se $\mu_{E \times F}(A \times B) = \mu_E(A) \times \mu_F(B)$. Consideremos, para isso, isomorfismos ortogonais $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\beta: F \rightarrow \mathbb{R}^n$, e reparemos que vem também ortogonal o isomorfismo $\lambda: E \times F \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, definido por,

$$\lambda(x, y) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_m(x), \beta_1(y), \dots, \beta_n(y)),$$

isomorfismo que não é mais do que a composição do isomorfismo $\alpha \times \beta$, de $E \times F$ sobre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, com o isomorfismo canónico $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$. Tem-se então que $\lambda(A \times B)$ é a imagem de $\alpha(A) \times \beta(B)$ pelo isomorfismo canónico, pelo que

$$\mu_{E \times F}(A \times B) = \mu_{m+n}(\lambda(A \times B)) = \mu_m(\alpha(A)) \mu_n(\beta(B)) = \mu_E(A) \mu_F(B),$$

como queríamos. \square

I.1.13 Sejam os espaços euclidianos E, F, \widehat{E} e \widehat{F} , e os isomorfismos $\alpha: E \rightarrow \widehat{E}$ e $\beta: F \rightarrow \widehat{F}$. Considerando então o isomorfismo $\alpha \times \beta: E \times F \rightarrow \widehat{E} \times \widehat{F}$, tem-se $c_{\alpha \times \beta} = c_\alpha \times c_\beta$.

Dem: Sejam $A \subset E$ e $B \subset F$ borelianos de medida finita e não nula. Tem-se então

$$\begin{aligned} c_{\alpha \times \beta} \mu_E(A) \mu_F(B) &= c_{\alpha \times \beta} \mu_{E \times F}(A \times B) = \mu_{\widehat{E} \times \widehat{F}}(\alpha \times \beta(A \times B)) = \\ &= \mu_{\widehat{E} \times \widehat{F}}(\alpha(A) \times \beta(B)) = \mu_{\widehat{E}}(\alpha(A)) \mu_{\widehat{F}}(\beta(B)) = c_\alpha c_\beta \mu_E(A) \mu_F(B). \square \end{aligned}$$

Na prática, interessará ter processos que permitam determinar o coeficiente de dilatação de um isomorfismo entre espaços euclidianos, sem fazer explicitamente a composição do isomorfismo com isomorfismos para os espaços \mathbb{R}^n . É nesse sentido que demonstramos os dois resultados seguintes, o primeiro de enunciado mais simples e justificação mais directa, mas o segundo de utilização bastante mais frequente.

I.1.14 Sejam E e F espaços euclidianos e $\xi: E \rightarrow F$ um isomorfismo. Dadas duas bases ortonormadas, x_1, \dots, x_n de E e y_1, \dots, y_n de F , tem-se então que o coeficiente de dilatação c_ξ é igual ao valor absoluto do determinante da matriz de ξ naquelas bases.

Dem: Sejam $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ os isomorfismos ortogonais, que aplicam as bases ortonormadas consideradas na base canónica de \mathbb{R}^n . É então imediato constatar que a matriz de ξ nas bases consideradas é igual à matriz do isomorfismo $\beta \circ \xi \circ \alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nas bases canónicas, pelo que a asserção resulta de I.1.9 e de I.1.3. \square

I.1.15 Sejam E e F espaços euclidianos e $\xi: E \rightarrow F$ um isomorfismo. Seja x_1, \dots, x_n uma base ortonormada de E , e seja, para cada $1 \leq i, j \leq n$,

$$g_{i,j} = \langle \xi(x_i), \xi(x_j) \rangle.$$

Tem-se então que o coeficiente de dilatação c_ξ é a raiz quadrada do determinante da matriz dos $g_{i,j}$ (em particular, este determinante é estritamente positivo).

Dem: Seja y_1, \dots, y_n uma base ortonormada de F , e sejam $a_{i,j}$ os elementos da matriz de ξ nas bases consideradas, isto é, os definidos por

$$\xi(x_j) = \sum_i a_{i,j} y_i.$$

Pelo resultado anterior, sabemos que c_ξ é o valor absoluto do determinante da matriz A de elementos $a_{i,j}$. Vem

$$g_{j,k} = \langle \xi(x_j), \xi(x_k) \rangle = \sum_i a_{i,j} a_{i,k},$$

pele que o elemento $g_{j,k}$ é o elemento da linha j e da coluna k da matriz produto $A^* \times A$, onde A^* nota a transposta da matriz A . Se atendermos ao facto que

$$\det(A^* \times A) = \det(A^*) \times \det(A) = \det(A)^2,$$

concluimos finalmente que o determinante da matriz dos $g_{j,k}$ é igual a c_ξ^2 . \square

§2. Medida de Lebesgue sobre as variedades.

O nosso objectivo nesta secção é o de definir a medida de Lebesgue dos borelianos de uma subvariedade M , de dimensão m , de um espaço euclidiano E , noção que vai generalizar a medição de comprimentos sobre curvas ou de áreas sobre superfícies. Antes de examinarmos o modo como esta se define, e por uma questão técnica relacionada com a possibilidade de tratar o caso das variedades com bordo, teremos necessidade de uma versão ligeiramente mais geral dos resultados I.1.4 e I.1.5, em que os abertos U e V são substituídos por borelianos totais. Começemos por enunciar um lema de Teoria da Medida, que será utilizado mais de uma vez.

I.2.1 (Lema) Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, $X \subset E$ um boreliano e μ e μ' duas medidas definidas nos borelianos de X , tais que, para cada $a \in X$, exista um aberto U de X , com $a \in U$, tal que, para cada boreliano $A \subset U$, $\mu(A) = \mu'(A)$ (as medidas *coincidem localmente*). Tem-se então $\mu = \mu'$.

Dem: Para cada $a \in X$, seja U_a um aberto de X , com $a \in U_a$, tal que, para cada boreliano $A \subset U_a$, $\mu(A) = \mu'(A)$. Chamemos pequenos aos borelianos A de X , que estão contidos nalgum dos conjuntos U_a . Vamos ver que X é uma união numerável de abertos pequenos X_n , com $n \in \mathbb{N}$. Para isso, consideremos uma base numerável de abertos para X (uma vez que \mathbb{R}^n tem uma base numerável de abertos, o mesmo vai acontecer a E , e portanto também a todo o subconjunto de E) e tomemos para sucessão X_n uma sucessão dos elementos dessa base de abertos que estão contidos nalgum dos U_a . O facto de a união dos X_n ser efectivamente X vem de que, para cada $a \in X$, vai existir um aberto da base, contendo a e contido em U_a . Dado um boreliano $A \subset X$ arbitrário, podemos agora considerar os borelianos $A_n \subset A$, onde A_n vai ser o conjunto dos pontos de A , que estão em X_n , mas

não estão em nenhum dos X_k , com $k < n$; é imediato constatar que A vai ser a união dos borelianos A_n , que são pequenos e disjuntos dois a dois, donde, finalmente,

$$\mu(A) = \sum_n \mu(A_n) = \sum_n \mu'(A_n) = \mu'(A). \square$$

I.2.2 Dado um espaço vectorial E , de dimensão finita, vamos dizer que um conjunto $X \subset E$ é *total* se, para cada $x \in X$, o espaço vectorial tangente $T_x(X)$ é igual a E . Como exemplos de conjuntos totais, temos:

- a) Se $U \subset E$ é aberto, então U é total;
- b) Mais geralmente, se U é aberto num sector S de E , então U é total;
- c) Mais geralmente ainda, se E tem dimensão m e se $M \subset E$ é uma variedade com a mesma dimensão m , eventualmente com bordo, então M é total.

I.2.3 (**Generalização de I.1.4**) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ dois borelianos totais e $\varphi: X \rightarrow Y$ um difeomorfismo de classe C^1 . Para cada boreliano $A \subset X$, tem-se então

$$\mu_n(\varphi(A)) = \int_A c_{D\varphi(x)} d\mu_n(x),$$

em que a função integranda do segundo membro é uma função contínua de X em $]0, +\infty[$.

Dem: Sejam \hat{U} um aberto de \mathbb{R}^n , contendo X , e $\hat{\varphi}: \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ um prolongamento de classe C^1 de φ . É claro que, para cada x , $D\varphi_x$ é uma restrição de $D\hat{\varphi}_x$, pelo que, uma vez que X é total, $D\varphi_x = D\hat{\varphi}_x$, em particular, a continuidade da aplicação $D\hat{\varphi}: \hat{U} \rightarrow L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ implica a continuidade da aplicação de X em $]0, +\infty[$, que a x associa $c_{D\varphi(x)}$. Para cada $a \in X$, $D\hat{\varphi}_a = D\varphi_a$ é um isomorfismo de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}^n , pelo que o teorema da função inversa garante a existência de um aberto U de \mathbb{R}^n , com $a \in U$, tal que a restrição de $\hat{\varphi}$ a U seja um difeomorfismo de U sobre um aberto V de \mathbb{R}^n . Aplicando I.1.4 a esta restrição, concluímos que, para cada boreliano $A \subset X \cap U$, a igualdade do enunciado é verificada. Uma vez que ambos os membros da igualdade do enunciado definem medidas sobre os borelianos de X , o resultado é agora uma consequência do lema I.2.1. \square

I.2.4 (**Generalização de I.1.5**) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ dois borelianos totais e $\varphi: X \rightarrow Y$ um difeomorfismo de classe C^1 . Para cada aplicação mensurável $g: Y \rightarrow [0, +\infty]$, tem-se então

$$\int_Y g(y) d\mu_n(y) = \int_X g(\varphi(x)) c_{D\varphi(x)} d\mu_n(x),$$

a mesma fórmula sendo válida no caso em que g é uma função integrável com valores em \mathbb{R} ou, mais geralmente, num espaço vectorial de dimensão

finita.

Dem: Tal como nas observações que foram feitas a seguir a I.1.5, consideramos a medida μ' , sobre os borelianos de X , definida por $\mu'(A) = \mu_n(\varphi(A))$, tendo-se então que o difeomorfismo φ é, por definição, compatível, quando se considera em X a medida μ' e em Y a medida μ_n . Resulta de I.2.3 que μ' é também a medida definida pela função mensurável positiva $x \mapsto c_{D\varphi(x)}$, pelo que a igualdade do enunciado resulta de que, por I.1.1 e I.1.2, ambos os membros são iguais a $\int_X g(\varphi(x)) d\mu'(x)$. \square

I.2.5 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Tem-se então que M é reunião de uma família numerável de compactos, em particular, M é um boreliano de E .

Dem: Vamos começar por mostrar que, se V é um aberto num sector S dum espaço vectorial F , de dimensão m , então V é reunião de uma família numerável de compactos. Para isso definimos, para cada natural n ,

$$K_n = \{x \in S \mid d(x, S \setminus V) \geq \frac{1}{n} \text{ e } \|x\| \leq n\},$$

omitindo a primeira condição no caso em que $V = S$, e reparamos que V vem união dos K_n e que estes são compactos, por serem limitados e fechados em S , logo também em E .

Para cada $a \in M$, seja agora $\varphi_a: U_a \rightarrow V_a$ um difeomorfismo, com $a \in U_a$, U_a aberto de M e V_a aberto num sector dum espaço vectorial de dimensão m . Consideremos uma base numerável de abertos de M e notemos W_n uma numeração dos abertos da base que estão contidos nalgum dos U_a . É então fácil constatar que M é a união dos W_n e que cada W_n é homeomorfo a um aberto dum sector dum espaço vectorial de dimensão m , sendo portanto uma reunião numerável de compactos, de onde se deduz que M é também um reunião numerável de compactos. O facto de M ser um boreliano de E resulta agora de que os compactos de M vão ser fechados em E , logo borelianos. \square

I.2.6 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Vamos dizer que um boreliano $A \subset M$ é *pequeno*, se existir um aberto U de M , com $A \subset U$, um boreliano V de \mathbb{R}^m , e um difeomorfismo de classe C^1 $\varphi: V \rightarrow U$. Repare-se que V é então, automaticamente, um boreliano total de \mathbb{R}^m , visto que, para cada $x \in V$, $T_x(V)$ vai ser um subespaço vectorial de \mathbb{R}^m , isomorfo a $T_{\varphi(x)}(U)$, que tem dimensão m , pelo que $T_x(V)$ tem dimensão m , e portanto $T_x(V) = \mathbb{R}^m$.

I.2.7 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Seja $A \subset M$ um boreliano pequeno. Sejam os abertos U e \hat{U} de M , contendo A , os borelianos V e \hat{V} de \mathbb{R}^m , e os difeomorfismos de classe C^1 $\varphi: V \rightarrow U$ e $\hat{\varphi}: \hat{V} \rightarrow \hat{U}$. Sendo então $B = \varphi^{-1}(A)$ e $\hat{B} = \hat{\varphi}^{-1}(A)$, tem-se

$$\int_B c_{D\varphi(x)} d\mu_m(x) = \int_{\widehat{B}} c_{D\widehat{\varphi}(x)} d\mu_m(x),$$

onde as funções integrandas são aplicações contínuas, definidas em V e \widehat{V} , respectivamente, e com valores em $]0, +\infty[$.

Dem: Considerando eventualmente um prolongamento de classe C^1 de φ a um aberto de \mathbb{R}^m , contendo V , vemos que é contínua a aplicação de V em $L(\mathbb{R}^m; E)$, que a x associa $D\varphi_x$, pelo que a caracterização do coeficiente de dilatação, dada em I.1.15, mostra-nos que é contínua a aplicação de V em $]0, +\infty[$, que a x associa $c_{D\varphi(x)}$.

Reparemos agora que, substituindo eventualmente os abertos U e \widehat{U} de M por $U \cap \widehat{U}$, e as aplicações φ e $\widehat{\varphi}$ por restrições convenientes, ficamos reduzidos a provar a igualdade do enunciado no caso particular em que $U = \widehat{U}$. Tem-se então que $\varphi^{-1} \circ \widehat{\varphi}: \widehat{V} \rightarrow V$ é um difeomorfismo de classe C^1 entre borelianos totais de \mathbb{R}^m , ao qual podemos aplicar I.2.4. Notando então χ_Z a função característica de um conjunto Z , obtemos

$$\begin{aligned} \int_B c_{D\varphi(y)} d\mu_m(y) &= \int_V \chi_B(y) c_{D\varphi(y)} d\mu_m(y) = \\ &= \int_{\widehat{V}} \chi_B(\varphi^{-1} \circ \widehat{\varphi}(x)) c_{D\varphi(\varphi^{-1} \circ \widehat{\varphi}(x))} c_{D(\varphi^{-1} \circ \widehat{\varphi})(x)} d\mu_m(x) = \\ &= \int_{\widehat{V}} \chi_{\widehat{B}}(x) c_{D\varphi(\varphi^{-1} \circ \widehat{\varphi}(x)) \circ D(\varphi^{-1} \circ \widehat{\varphi})(x)} d\mu_m(x) = \\ &= \int_{\widehat{B}} c_{D\widehat{\varphi}(x)} d\mu_m(x). \square \end{aligned}$$

Repare-se que, no resultado anterior, quando falamos no coeficiente de dilatação de $D\varphi(x)$, estamos a referir-nos ao coeficiente de dilatação de um isomorfismo de \mathbb{R}^m , com a sua estrutura euclidiana canónica, sobre o subespaço vectorial $T_{\varphi(x)}(M)$ de E , com o produto interno induzido pelo produto interno deste espaço euclidiano.

I.2.8 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Para cada boreliano pequeno $A \subset M$, define-se então a sua medida de Lebesgue (relativa a M), $\mu_M(A)$, pela fórmula

$$\mu_M(A) = \int_B c_{D\varphi(x)} d\mu_m(x),$$

onde $\varphi: V \rightarrow U$ é um difeomorfismo de classe C^1 , com V boreliano de \mathbb{R}^m e U aberto de M , contendo A , e $B = \varphi^{-1}(A)$.

Repare-se que é o resultado I.2.7 que garante que a definição anterior é legítima, isto é, que o resultado obtido não depende do difeomorfismo φ

escolhido. Pelo contrário, é evidente que a medida de Lebesgue nos borelianos pequenos de M vai depender do produto interno fixado no espaço ambiente E .

I.2.9 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão m , e olhemos para E como variedade de dimensão m . Tem-se então que todo o boreliano $A \subset E$ é pequeno, e a sua medida de Lebesgue $\mu_E(A)$ é a mesma, quer se considere E como espaço euclidiano ou como variedade.

Dem: Considerar um isomorfismo ortogonal $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow E$. \square

I.2.10 (**Lema**) Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Dado um boreliano pequeno $X \subset M$, tem-se então que a restrição da aplicação μ_M ao conjunto dos borelianos contidos em X é uma medida sobre os borelianos de X .

Dem: Trata-se de uma demonstração imediata, a partir da definição da medida de Lebesgue dos borelianos pequenos. \square

I.2.11 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Tem-se então:

a) Todo o boreliano A de M é união de uma família numerável de borelianos pequenos disjuntos dois a dois;

b) Existe uma, e uma só, medida μ_M , sobre os borelianos de M , que nos borelianos pequenos tome o valor definido em I.2.8 (dizemos que μ_M é a *medida de Lebesgue* da variedade M , associada ao produto interno de E).

Dem: Para cada $a \in M$, seja U_a um aberto de M , com $a \in U_a$, que seja difeomorfo a um aberto num sector de \mathbb{R}^m , o qual vai ser, em particular, um boreliano de \mathbb{R}^m . Fixemos uma base numerável de abertos de M e notemos W_n uma numeração dos abertos desta base que estão contidos nalgum dos U_a . É então fácil constatar que M é a união dos abertos pequenos W_n . Dado o boreliano $A \subset M$, podemos, para cada natural n , considerar o conjunto A_n dos $x \in A$, que estão em W_n , mas não estão em nenhum dos W_i com $i < n$, tendo-se então que os A_n são borelianos pequenos disjuntos dois a dois e que A é a união dos A_n . Ficou portanto provada a alínea a) do enunciado. A asserção de unicidade da alínea b) é uma consequência de a), visto que, se o boreliano A é a união de uma família numerável de borelianos pequenos, A_n , disjuntos dois a dois, então não pode deixar de ser $\mu_M(A) = \sum_n \mu_M(A_n)$.

Suponhamos que o boreliano A de M se decompõe de duas maneiras distintas como união numerável de borelianos pequenos disjuntos dois a dois: $A = \bigcup_n A_n = \bigcup_k B_k$. Tem-se então que cada A_n é a união em k dos $A_n \cap B_k$, que são disjuntos dois a dois, e cada B_k é a união em n dos $A_n \cap B_k$, que são disjuntos dois a dois, pelo que, tendo em conta o lema anterior,

$$\begin{aligned}\sum_n \mu_M(A_n) &= \sum_n \sum_k \mu_M(A_n \cap B_k) = \sum_{n,k} \mu_M(A_n \cap B_k) = \\ &= \sum_k \sum_n \mu_M(A_n \cap B_k) = \sum_k \mu_M(B_k).\end{aligned}$$

Faz portanto sentido definir, para cada boreliano $A \subset M$, pequeno ou não, $\mu_M(A) = \sum_n \mu_M(A_n)$, onde os A_n constituem uma família arbitrária de borelianos pequenos disjuntos dois a dois e de união A . É claro que, se o boreliano A fosse pequeno, a definição de $\mu_M(A)$ coincide com a já conhecida, visto que se pode considerar a decomposição em que um dos A_n é A e os restantes são vazios. É também fácil constatar que a aplicação μ_M , assim definida no conjunto de todos os borelianos de A , é uma medida. \square

I.2.12 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão 0, isto é, um subconjunto de E cuja topologia induzida é a topologia discreta. Tem-se então que todos os subconjuntos $A \subset M$ são abertos em M , em particular borelianos, e um tal boreliano é pequeno se, e só se, ele é vazio ou constituído por um único elemento. É claro que, uma vez que o coeficiente de dilatação de um isomorfismo entre espaços vectoriais de dimensão 0 é sempre igual a 1, vem $\mu_M(\emptyset) = 0$ e $\mu_M(\{a\}) = 1$, pelo que podemos concluir que a medida de Lebesgue μ_M nos borelianos de M é a *medida de contagem*, isto é, que $\mu_M(A)$ é o número de elementos de A , se este é finito, e que $\mu_M(A) = +\infty$, se A é infinito. Concluimos, ao mesmo tempo, tendo em conta a alínea a) do resultado anterior, que toda a variedade de dimensão 0, $M \subset E$, é finita ou numerável, o que podia evidentemente ser também demonstrado de modo directo.

I.2.13 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Seja $\widehat{M} \subset M$ outra variedade com a mesma dimensão. Para cada boreliano $A \subset \widehat{M}$, tem-se então $\mu_{\widehat{M}}(A) = \mu_M(A)$.

Dem: Para cada $a \in \widehat{M}$, podemos considerar um aberto U de M , com $a \in U$, um boreliano V de \mathbb{R}^m e um difeomorfismo $\varphi: V \rightarrow U$. Tem-se então que $U \cap \widehat{M}$ é um aberto de \widehat{M} , contendo a , e a restrição de φ vai ser um difeomorfismo do boreliano $\varphi^{-1}(U \cap \widehat{M})$, de \mathbb{R}^m , sobre $U \cap \widehat{M}$. Resulta daqui, e da fórmula de I.2.8, que, para cada boreliano $A \subset U \cap \widehat{M}$, que é automaticamente pequeno, tanto para M como para \widehat{M} , tem-se $\mu_M(A) = \mu_{\widehat{M}}(A)$. A asserção do enunciado é agora uma consequência do lema I.2.1. \square

I.2.14 Dados o espaço euclidiano E e a variedade de dimensão m , $M \subset E$, nota-se simplesmente $\mu(M)$ a medida de Lebesgue $\mu_M(M)$, da variedade M , considerada como boreliano nela mesma. Repare-se que, tendo em conta o resultado anterior, tem-se também $\mu(M) = \mu_{\widehat{M}}(M)$, qualquer que seja a variedade $\widehat{M} \subset E$ com a mesma dimensão e contendo M .

I.2.15 (**Lema**) Sejam E um espaço euclidiano de dimensão n e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m < n$. Tem-se então $\mu_E(M) = 0$.

Dem: Seja $a \in M$ arbitrário. Sendo p o índice da variedade M no ponto a , podemos considerar um aberto V de $\mathbb{R}_p^m = \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}_+^p$, com $0 \in V$, um aberto U de M , com $a \in U$, e um difeomorfismo $\varphi: V \rightarrow U$, com $\varphi(0) = a$. Podemos então considerar um aberto \hat{V} de \mathbb{R}^m , contendo V , e um prolongamento suave $\hat{\varphi}: \hat{V} \rightarrow E$ de φ . Vem que $D\hat{\varphi}(0) = D\varphi(0)$ é um isomorfismo de \mathbb{R}^m sobre $T_a(M)$, pelo que, sendo e_1, \dots, e_m a base canónica de \mathbb{R}^m , ficamos com um sistema linearmente independente de vectores de E , $D\hat{\varphi}_0(e_1), \dots, D\hat{\varphi}_0(e_m)$, que podemos completar com $n - m$ vectores z_{m+1}, \dots, z_n , de modo a obter uma base de E . Consideremos então a aplicação ψ do aberto $\hat{V} \times \mathbb{R}^{n-m}$, de \mathbb{R}^n , em E , definida por

$$\psi(t_1, \dots, t_n) = \hat{\varphi}(t_1, \dots, t_m) + t_{m+1}z_{m+1} + \dots + t_n z_n,$$

aplicação que é suave e cuja derivada em 0 aplica a base canónica de \mathbb{R}^n na base referida de E . Aplicando o teorema da função inversa, concluímos a existência de um aberto \tilde{V} de \mathbb{R}^m , com $0 \in \tilde{V} \subset \hat{V}$, e de um aberto \tilde{W} de \mathbb{R}^{n-m} , com $0 \in \tilde{W}$, tais que a restrição de ψ a $\tilde{V} \times \tilde{W}$ seja um difeomorfismo sobre um aberto de E . Tem-se então que $\varphi(V \cap \tilde{V})$ é um aberto de M , contendo a , e, para cada boreliano A contido neste aberto, sai $\mu_E(A) = 0$, visto que, sendo $B \subset V \cap \tilde{V}$ o boreliano tal que

$$A = \varphi(B) = \hat{\varphi}(B) = \psi(B \times \{0\}),$$

$\mu_E(A)$ é dado por um integral sobre o subconjunto $B \times \{0\}$ de \mathbb{R}^n , o qual tem medida nula, visto que $\{0\}$ tem medida nula em \mathbb{R}^{n-m} , por ser $n > m$. Tendo em conta o lema I.2.1, concluímos agora que a restrição de μ_E aos borelianos de M é a medida identicamente nula, em particular $\mu_E(M) = 0$. \square

I.2.16 Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade de dimensão m e $X \subset M$ uma variedade de dimensão $k < m$. Tem-se então $\mu_M(X) = 0$.

Dem: Seja $a \in X$ arbitrário. Sejam U um aberto de M , com $a \in U$, V um aberto num sector de \mathbb{R}^m e $\varphi: V \rightarrow U$ um difeomorfismo. Sendo então $Y = \varphi^{-1}(U \cap X)$, vem que Y é uma variedade de dimensão k , donde, pelo lema anterior, $\mu_m(Y) = 0$. Deduzimos daqui que

$$\mu_M(X \cap U) = \int_Y c_{D\varphi(x)} d\mu_m(x) = 0.$$

Provámos portanto que, para cada boreliano A , contido no aberto $U \cap X$ de X , que contém a , tem-se $\mu_M(A) = 0$, donde, mais uma vez pelo lema I.2.1, a restrição aos borelianos de X da medida μ_M é identicamente nula, em particular $\mu_M(X) = 0$. \square

I.2.17 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Tem-se então:

- a) Se $U \subset M$ é um aberto não vazio, então $\mu_M(U) > 0$;
b) Para cada $a \in M$, existe um aberto U de M , com $a \in U$, tal que $\mu_M(U) < +\infty$;
c) Para cada compacto $K \subset M$, tem-se $\mu_M(K) < +\infty$.

Dem: a) Seja $a \in U$. Uma vez que U é também uma variedade de dimensão m , podemos considerar um aberto U' de U , com $a \in U'$, um aberto V' de $\mathbb{R}_p^m = \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}_+^p$, com $0 \in V'$, e um difeomorfismo $\varphi: V' \rightarrow U'$, com $\varphi(0) = a$. Existe então $r > 0$ tal que $[0, r]^m \subset V'$, donde $\mu_M(V') \geq r^m > 0$, o que implica, uma vez que os coeficientes de dilatação são estritamente positivos,

$$\mu_M(U) \geq \mu_M(U') = \int_{V'} c_{D\varphi(x)} d\mu_m(x) > 0.$$

b) Como anteriormente, consideremos um aberto U' de M , com $a \in U'$, um aberto V' de $\mathbb{R}_p^m = \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}_+^p$, com $0 \in V'$, e um difeomorfismo $\varphi: V' \rightarrow U'$, com $\varphi(0) = a$. A continuidade da aplicação de V' em $]0, +\infty[$, que a cada x associa $c_{D\varphi(x)}$, permite-nos escolher $r > 0$ tal que o conjunto

$$V =]-r, r[^{m-p} \times [0, r]^p =]-r, r[^m \cap \mathbb{R}_p^m$$

esteja contido em V' e que, para um certo $R > 0$, $c_{D\varphi(x)} \leq R$, para todo o x naquele conjunto. Sendo então $U = \varphi(V)$, que é um aberto de M , contendo a , vem

$$\mu_M(U) = \int_V c_{D\varphi(x)} d\mu_m(x) \leq R\mu_m(V) < +\infty.$$

c) Suponhamos que $K \subset M$ é um compacto. Para cada $a \in K$, podemos, pelo que vimos em b), considerar um aberto U_a de M , com $a \in U_a$, tal que se tenha $\mu_M(U_a) < +\infty$. Uma vez que a família dos U_a é uma cobertura aberta do compacto K , podemos considerar uma parte finita J de K , tal que K esteja contido na união dos U_a , com $a \in J$, de onde concluímos que

$$\mu_M(K) \leq \sum_{a \in J} \mu_M(U_a) < +\infty. \square$$

§3. Teoremas de Fubini e da mudança de variáveis.

Recordemos que um espaço de medida se diz σ -finito se for união de uma família numerável de conjuntos mensuráveis de medida finita. Recordemos ainda que, dados dois espaços topológicos, com bases numeráveis de abertos, munidos de medidas σ -finitas sobre os respectivos borelianos, fica definida, sobre a classe dos borelianos do seu produto

cartesiano, uma medida, chamada medida produto, definida pela condição de ser a única que, num produto cartesiano de dois borelianos, toma como valor o produto das medidas destes. Para determinar a medida de borelianos do produto cartesiano, assim como para determinar o integral de funções definidas neste, pode-se então aplicar o teorema de Fubini, que reduz a determinação de um integral duplo a um cálculo iterado de integrais simples. Será assim especialmente bem recebido um resultado que nos assegure que a medida de Lebesgue, sobre o produto de duas variedades, vai ser a medida produto das medidas de Lebesgue sobre cada uma dessas variedades.

I.3.1 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Tem-se então que a medida de Lebesgue μ_M , sobre os borelianos de M , é σ -finita.

Dem: É uma consequência do facto de toda a variedade ser união de uma família numerável de compactos e de cada um destes ter medida finita. \square

I.3.2 Sejam E e \hat{E} espaços euclidianos e consideremos sobre $E \times \hat{E}$ o correspondente produto interno, definido por

$$\langle (u, \hat{u}), (v, \hat{v}) \rangle = \langle u, v \rangle + \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle.$$

Sejam $M \subset E$ e $\hat{M} \subset \hat{E}$ duas variedades, de dimensões m e n , respectivamente e consideremos a correspondente variedade $M \times \hat{M} \subset E \times \hat{E}$, com dimensão $m + n$. A medida de Lebesgue $\mu_{M \times \hat{M}}$ é então a medida produto das medidas μ_M e $\mu_{\hat{M}}$.

Dem: Vamos começar por provar que, se $A \subset M$ e $\hat{A} \subset \hat{M}$ são borelianos pequenos, então $\mu_{M \times \hat{M}}(A \times \hat{A}) = \mu_M(A) \times \mu_{\hat{M}}(\hat{A})$. Sejam U e \hat{U} abertos de M e \hat{M} , respectivamente, com $A \subset U$ e $\hat{A} \subset \hat{U}$, V e \hat{V} borelianos de \mathbb{R}^m e de \mathbb{R}^n , respectivamente, e $\varphi: V \rightarrow U$ e $\hat{\varphi}: \hat{V} \rightarrow \hat{U}$ dois difeomorfismos. Tem-se então que $U \times \hat{U}$ é um aberto de $M \times \hat{M}$, contendo $A \times \hat{A}$, $V \times \hat{V}$ é um boreliano de \mathbb{R}^{m+n} e $\varphi \times \hat{\varphi}: V \times \hat{V} \rightarrow U \times \hat{U}$ é um difeomorfismo. Tendo em conta I.1.13 e o teorema de Fubini, para funções em $\mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, obtemos, notando $B = \varphi^{-1}(A)$ e $\hat{B} = \hat{\varphi}^{-1}(\hat{A})$,

$$\begin{aligned} \mu_{M \times \hat{M}}(A \times \hat{A}) &= \int_{B \times \hat{B}} c_{D(\varphi \times \hat{\varphi})(x, y)} d\mu_{m+n}(x, y) = \\ &= \int_{B \times \hat{B}} c_{D\varphi(x)} c_{D\hat{\varphi}(y)} d\mu_{m+n}(x, y) = \\ &= \int_B c_{D\varphi(x)} \left(\int_{\hat{B}} c_{D\hat{\varphi}(y)} d\mu_n(y) \right) d\mu_m(x) = \\ &= \int_B c_{D\varphi(x)} \mu_{\hat{M}}(\hat{A}) d\mu_m(x) = \mu_M(A) \times \mu_{\hat{M}}(\hat{A}). \end{aligned}$$

Para terminar a demonstração, tudo o que temos que ver é que a igualdade anterior é válida para borelianos arbitrários A e \hat{A} , e não apenas para

borelianos pequenos. Ora, sabemos que A e \widehat{A} são uniões de famílias numeráveis de borelianos pequenos disjuntos dois a dois, $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $(\widehat{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, respectivamente, tendo-se então que $A \times \widehat{A}$ é a união, para (j, k) em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dos borelianos pequenos $A_j \times \widehat{A}_k$, que são disjuntos dois a dois, donde

$$\begin{aligned} \mu_{M \times \widehat{M}}(A \times \widehat{A}) &= \sum_{j,k} \mu_{M \times \widehat{M}}(A_j \times \widehat{A}_k) = \sum_{j,k} \mu_M(A_j) \mu_{\widehat{M}}(\widehat{A}_k) = \\ &= \left(\sum_j \mu_M(A_j) \right) \times \left(\sum_k \mu_{\widehat{M}}(\widehat{A}_k) \right) = \mu_M(A) \times \mu_{\widehat{M}}(\widehat{A}). \square \end{aligned}$$

Para terminar esta secção, vamos estabelecer uma fórmula de mudança de variáveis para difeomorfismos entre subvariedades de espaços euclidianos, começando com um lema, que será um caso particular do resultado final.

I.3.3 (Lema) Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade de dimensão m , U um aberto de M , V um boreliano de \mathbb{R}^m e $\varphi: V \rightarrow U$ um difeomorfismo de classe C^1 . Para cada aplicação mensurável $g: U \rightarrow [0, +\infty]$, tem-se então

$$\int_U g(y) d\mu_M(y) = \int_V g(\varphi(x)) c_{D\varphi(x)} d\mu_m(x).$$

Dem: Consideremos a medida μ' , definida nos borelianos de V , por $\mu'(B) = \mu_M(\varphi(B))$. Por definição, vem que o difeomorfismo $\varphi: V \rightarrow U$ é compatível com as medidas, quando se considera em V a medida μ' e em U a medida μ_M . Tendo em conta I.2.8, vem que a medida μ' está também definida por $\mu'(B) = \int_B c_{D\varphi(x)} d\mu_m(x)$, pelo que a igualdade do enunciado é uma consequência de que, por I.1.1 e I.1.2, ambos os membros são iguais a $\int_V g(\varphi(x)) d\mu'(x)$. \square

I.3.4 Sejam E e \widehat{E} espaços euclidianos, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades de dimensão m e $\varphi: M \rightarrow \widehat{M}$ um difeomorfismo de classe C^1 . Para cada boreliano $A \subset M$, tem-se então

$$\mu_{\widehat{M}}(\varphi(A)) = \int_A c_{D\varphi(x)} d\mu_M(x),$$

em que a função integranda do segundo membro é uma aplicação contínua de M em $]0, +\infty[$.¹

¹O símbolo $c_{D\varphi(x)}$ designa, naturalmente, o coeficiente de dilatação do isomorfismo $D\varphi(x): T_x(M) \rightarrow T_{\varphi(x)}(\widehat{M})$, quando se considera nestes dois espaços vectoriais os produtos internos induzidos pelos dos espaços ambientes E e \widehat{E} .

Dem: Começemos por mostrar a continuidade da aplicação de M em $]0, +\infty[$, que a cada x associa o coeficiente de dilatação $c_{D\varphi(x)}$. Para isso, dado $a \in M$ arbitrário, consideremos um aberto U de M , com $a \in U$, um boreliano V de \mathbb{R}^m e um difeomorfismo $\alpha: V \rightarrow U$. Vem então que $\varphi \circ \alpha: V \rightarrow \varphi(U)$ é um difeomorfismo de classe C^1 , com $\varphi(U)$ aberto em \widehat{M} , e sabemos, por I.2.7, que são contínuas as aplicações de V em $]0, +\infty[$, que a cada y em V associam respectivamente $c_{D\alpha(y)}$ e $c_{D(\varphi \circ \alpha)(y)} = c_{D\varphi(\alpha(y))} \times c_{D\alpha(y)}$, o que nos permite concluir que é também contínua a aplicação de V em $]0, +\infty[$, que a y associa $c_{D\varphi(\alpha(y))}$, donde, por composição com α^{-1} , a continuidade da aplicação de U em $]0, +\infty[$, que a x associa $c_{D\varphi(x)}$. Da arbitrariedade de a resulta agora a continuidade em M da função considerada.

Uma vez que ambos os membros da igualdade do enunciado, quando considerados como funções do boreliano A de M , são medidas sobre os borelianos de M , resulta, do lema I.2.1, que será suficiente demonstrar a igualdade no caso particular em que A é um boreliano pequeno de M . Sejam portanto U um aberto de M , com $A \subset U$, V um boreliano de \mathbb{R}^m e $\alpha: V \rightarrow U$ um difeomorfismo. Tem-se então que $\varphi \circ \alpha: V \rightarrow \varphi(U)$ é um difeomorfismo de classe C^1 , com $\varphi(U)$ aberto de \widehat{M} , pelo que, tendo em conta o lema anterior e a definição em I.2.8, vem, com $B = \alpha^{-1}(A)$,

$$\begin{aligned} \int_A c_{D\varphi(y)} d\mu_M(y) &= \int_U \chi_A(y) c_{D\varphi(y)} d\mu_M(y) = \\ &= \int_V \chi_A(\alpha(x)) c_{D\varphi(\alpha(x))} c_{D\alpha(x)} d\mu_m(x) = \\ &= \int_B c_{D\varphi(\alpha(x)) \circ D\alpha(x)} d\mu_m(x) = \int_B c_{D(\varphi \circ \alpha)(x)} d\mu_m(x) = \\ &= \mu_{\widehat{M}}(\varphi \circ \alpha(B)) = \mu_{\widehat{M}}(\varphi(A)). \square \end{aligned}$$

I.3.5 Sejam E e \widehat{E} espaços euclidianos, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ variedades de dimensão m e $\varphi: M \rightarrow \widehat{M}$ um difeomorfismo. Se $g: \widehat{M} \rightarrow [0, +\infty]$ é uma aplicação mensurável, tem-se então

$$\int_{\widehat{M}} g(y) d\mu_{\widehat{M}}(y) = \int_M g(\varphi(x)) c_{D\varphi(x)} d\mu_M(x),$$

a mesma fórmula sendo válida no caso em que g é uma função integrável com valores em \mathbb{R} ou, mais geralmente, num espaço vectorial de dimensão finita.

Dem: Trata-se, mais uma vez, de uma consequência dos resultados básicos de Teoria da Medida, I.1.1 e I.1.2, visto que podemos definir uma medida μ' nos borelianos de M , por $\mu'(A) = \mu_{\widehat{M}}(\varphi(A)) = \int_A c_{D\varphi(x)} d\mu_M(x)$, tendo-se então que ambos os membros da igualdade do enunciado vão ser iguais a $\int_M g(\varphi(x)) d\mu'(x)$. \square

I.3.6 (**Corolário**) Sejam E e \widehat{E} espaços euclidianos, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades de dimensão m e $\varphi: M \rightarrow \widehat{M}$ um difeomorfismo de classe C^1 , que seja uma *isometria*, isto é, tal que, para cada $x \in M$, o isomorfismo $D\varphi_x: T_x(M) \rightarrow T_{\varphi(x)}(\widehat{M})$ seja um isomorfismo ortogonal. Tem-se então:

a) Para cada boreliano $A \subset M$, $\mu_{\widehat{M}}(\varphi(A)) = \mu_M(A)$;

b) Para cada função mensurável $g: \widehat{M} \rightarrow [0, +\infty]$, tem-se

$$\int_{\widehat{M}} g(y) d\mu_{\widehat{M}}(y) = \int_M g(\varphi(x)) d\mu_M(x),$$

a mesma fórmula sendo válida no caso em que g é uma função integrável com valores em \mathbb{R} ou, mais geralmente, num espaço vectorial de dimensão finita.

Dem: É uma consequência dos dois resultados anteriores, visto que, uma vez que $D\varphi_x$ é um isomorfismo ortogonal, tem-se $c_{D\varphi(x)} = 1$. \square

I.3.7 (**Corolário**) Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade de dimensão m e $a \in E$ um vector fixado. Tem-se então que a translação $a + M \subset E$ é também uma variedade de dimensão m e tem lugar uma isometria $\tau_a: M \rightarrow a + M$, definida por $\tau_a(x) = a + x$, em particular, para cada boreliano $A \subset M$, $\mu_{a+M}(a + A) = \mu_M(A)$.

I.3.8 (**Corolário**) Sejam E e \widehat{E} espaços euclidianos e $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$ um isomorfismo ortogonal. Para cada variedade $M \subset E$, de dimensão m , tem-se então que $\xi(M) \subset \widehat{E}$ é também uma variedade de dimensão m e a restrição de ξ é uma isometria de M sobre $\xi(M)$, em particular, para cada boreliano $A \subset M$, $\mu_{\xi(M)}(\xi(A)) = \mu_M(A)$.

I.3.9 (**Corolário**) Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade de dimensão m e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ um real não nulo. Tem-se então que o conjunto homotético $cM \subset E$ é também uma variedade de dimensão m e, considerando as estruturas riemanianas induzidas pelo produto interno de E , vem, para cada boreliano $A \subset M$, $\mu_{cM}(cA) = |c|^m \mu_M(A)$.

Dem: Tem lugar o difeomorfismo $\varphi: M \rightarrow cM$, definido por $\varphi(x) = cx$, pelo que o resultado ficará provado, se virmos que, para todo o $x \in M$, se tem $c_{D\varphi(x)} = |c|^m$. Ora, considerando uma base ortonormada w_1, \dots, w_m de $T_x(M)$, tem-se $D\varphi_x(w_j) = cw_j$ pelo que, na notação de I.1.15, a matriz dos $g_{i,j} = \langle D\varphi_x(w_i), D\varphi_x(w_j) \rangle$ é a matriz diagonal de tipo $m \times m$, com os elementos da diagonal iguais a c^2 , tendo portanto determinante igual a c^{2m} . O coeficiente de dilatação, igual à raiz quadrada deste determinante, é portanto igual a $|c|^m$. \square

Não se deve ficar com a ideia que, se $\xi: E \rightarrow \widehat{E}$ é um isomorfismo entre espaços euclidianos, então, para cada variedade de dimensão m , $M \subset E$ e cada boreliano A de M , seja válida a fórmula $\mu_{\xi(M)}(\xi(A)) = c_\xi \mu_M(A)$. Na verdade, esta fórmula seria válida no caso em que a função integranda

do segundo membro de I.3.4 fosse constante e com valor c_ξ , mas o que se passa é que, sendo $\varphi: M \rightarrow \xi(M)$ o difeomorfismo restrição de ξ , $D\varphi_x$ vai ser o isomorfismo restrição de ξ , mas o seu coeficiente de dilatação não será, em geral, igual ao de ξ , nem sequer constante, visto depender do espaço vectorial tangente $T_x(M) \subset E$. O que se passou, nos corolários anteriores, é que, para certos isomorfismos particulares, chegámos à conclusão que a função integranda referida era efectivamente constante.

§4. Coordenadas polares generalizadas e medidas das esferas.

As coordenadas polares, que estamos habituados a utilizar em \mathbb{R}^2 , associam a cada par $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, um par (r, φ) , em que r é a norma de (x, y) ($r^2 = x^2 + y^2$) e φ um dos seus argumentos ($x = r \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\varphi)$). É claro que o argumento está definido a menos de um múltiplo de 2π , de modo que, para se obter um verdadeiro difeomorfismo entre abertos de \mathbb{R}^2 , que permita, por exemplo, integrar por mudança de variáveis, é costume escolher a determinação do argumento que está no intervalo $]0, 2\pi[$, o que obriga a tirar do domínio do sistema de coordenadas a parte positiva do eixo dos x ; isso não oferece inconveniente, do ponto de vista da integração, uma vez que este conjunto é de medida nula. As coordenadas polares definem então um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty[\times \{0\})$ sobre $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$, e elas são utilizadas com frequência para calcular a medida de conjuntos com simetria radial e o integral sobre tais conjuntos de funções com o mesmo tipo de simetria (isto é, funções cujo valor depende apenas de r). Para resolvermos o mesmo tipo de problema em dimensões superiores, vamos introduzir umas coordenadas polares generalizadas, que, mesmo no caso de \mathbb{R}^2 , são um pouco mais simples que as coordenadas polares usuais. Observe-se que o que se costuma usar em \mathbb{R}^3 , para substituir as coordenadas polares, as coordenadas esféricas, têm um comportamento muito menos agradável que aquelas (em particular, o coeficiente de dilatação não é função só de r) e as coisas ainda piorariam se prosseguíssemos na mesma via para dimensões superiores.

I.4.1 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $m \geq 1$, e notemos $S \subset E$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1, definida por

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\},$$

conjunto que sabemos ser uma variedade, sem bordo, de dimensão $m - 1$. Recordemos ainda que, para cada $x \in S$, o espaço vectorial tangente $T_x(S)$ é o conjunto dos vectores $w \in E$ tais que $\langle w, x \rangle = 0$. Tem então lugar um difeomorfismo

$$\varphi:]0, +\infty[\times S \rightarrow E \setminus \{0\}, \varphi(r, x) = rx,$$

cujo inverso está definido por

$$\varphi^{-1}(y) = (\|y\|, \frac{y}{\|y\|}).$$

Além disso, para cada $(r, x) \in]0, +\infty[\times S$, tem-se, para o coeficiente de dilatação,

$$c_{D\varphi(r,x)} = r^{m-1}.$$

Dem: É imediato que φ é uma aplicação suave com valores em $E \setminus \{0\}$, e o facto de ser um difeomorfismo, com o inverso referido no enunciado, vem de que tem lugar uma aplicação suave $E \setminus \{0\} \rightarrow]0, +\infty[\times S$, que a cada y associa $(\|y\|, \frac{y}{\|y\|})$, aplicação que se verifica facilmente ser um inverso bilateral de φ . Para calcularmos o coeficiente de dilatação, dado $(r, x) \in]0, +\infty[\times S$, consideramos uma base ortonormada w_1, \dots, w_{m-1} de $T_x(S)$, e reparamos que podemos considerar a base ortonormada $(1, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_{m-1})$ de $T_{(r,x)}(]0, +\infty[\times S) = \mathbb{R} \times T_x(S)$, a qual vai ser aplicada, por $D\varphi_{(r,x)}$ na base de E formada pelos vectores x, rw_1, \dots, rw_{m-1} . Uma vez que estes vectores são ortogonais dois a dois, vemos que a matriz associada dos $g_{i,j}$ (cf. I.1.15) é uma matriz diagonal, com um dos elementos da diagonal igual a 1 e os restantes $m-1$ elementos iguais a r^2 . O determinante desta matriz é portanto igual a $r^{2(m-1)}$, pelo que o coeficiente de dilatação, igual à raiz quadrada deste determinante, é igual a r^{m-1} . \square

Nas condições do resultado anterior, dado $y = \varphi(r, x) \in E \setminus \{0\}$, olharemos para r e x como sendo as *coordenadas polares generalizadas* de y , a primeira a sua norma e a segunda caracterizando a sua direcção. Repare-se que a segunda coordenada não é um número real, mas um elemento da hipersuperfície esférica S .

I.4.2 Para cada inteiro $n \geq 0$, vamos notar σ_n a medida $\mu(S)$ da hipersuperfície esférica, de centro 0 e raio 1, num espaço euclidiano E de dimensão $n+1$ (reparar que S é então uma variedade de dimensão n). O facto de esta medida não depender do espaço euclidiano E , de dimensão $n+1$, que se considera, é uma consequência imediata da invariância da medida pelos isomorfismos ortogonais, que estudámos em I.3.8, visto que é imediato que um tal isomorfismo aplica a hipersuperfície esférica sobre a hipersuperfície esférica. O facto de S ser uma variedade compacta e não vazia, implica que σ_n é finito e não nulo.

I.4.3 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n+1$ e $B \subset E$ a bola fechada de centro 0 e raio 1. Tem-se então

$$\mu_E(B) = \frac{\sigma_n}{n+1}.$$

Dem: Considerando o difeomorfismo $\varphi:]0, +\infty[\times S \rightarrow E \setminus \{0\}$, que define as coordenadas polares generalizadas, tem-se $B \setminus \{0\} = \varphi(]0, 1] \times S)$, pelo que, tendo em conta o facto de se ter $\mu_E(\{0\}) = 0$, por $\{0\}$ ser uma variedade de dimensão inferior à de E , e aplicando o teorema de Fubini e a fórmula de integração por mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} \mu_E(B) &= \mu_E(\varphi(]0, 1] \times S)) = \int_{]0, 1] \times S} t^n d\mu_{]0, 1] \times S}(t, x) = \\ &= \int_0^1 \left(\int_S t^n d\mu_S(x) \right) dt = \int_0^1 \sigma_n t^n dt = \frac{\sigma_n}{n+1}. \square \end{aligned}$$

I.4.4 (Corolário) Seja E um espaço euclidiano de dimensão $n+1$. Para cada $r > 0$, sejam S_r e B_r a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio r e a bola fechada de centro 0 e raio r . Tem-se então

$$\mu(S_r) = \sigma_n r^n, \quad \mu_E(B_r) = \frac{\sigma_n r^{n+1}}{n+1}.$$

Dem: Basta atender a que S_r e B_r são as imagens de S e de B , pela homotetia de razão r , tendo então em conta I.3.9. \square

Vamos agora estabelecer uma fórmula que nos permite calcular recursivamente as constantes σ_n . Uma vez que essa fórmula vai dar σ_{n+2} a partir de σ_n , começamos por determinar σ_0 e σ_1 , obtendo resultados que não espantarão ninguém...

I.4.5 Tem-se $\sigma_0 = 2$ e $\sigma_1 = 2\pi$.

Dem: Considerando \mathbb{R} como espaço euclidiano de dimensão 1, do modo usual, vem que $S \subset \mathbb{R}$ é a variedade de dimensão 0, constituída pelos dois elementos -1 e 1 , pelo que, uma vez que nas variedades de dimensão 0 a medida de Lebesgue é a medida de contagem, vemos que $\sigma_0 = 2$. Consideremos agora \mathbb{R}^2 como espaço euclidiano de dimensão 2, do modo usual. Vem que a hipersuperfície esférica de centro $(0, 0)$ e raio 1 é a circunferência

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Sabemos que tem lugar uma bijecção suave

$$\varphi:]0, 2\pi[\rightarrow S \setminus \{(1, 0)\}, \quad \varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

e o teorema da função inversa garante-nos que esta bijecção é um difeomorfismo, visto que $S \setminus \{(1, 0)\}$ é uma variedade, sem bordo, com dimensão 1, e

o facto de se ter $\varphi'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq 0$, implica que $D\varphi_t$ é uma aplicação linear injectiva, logo um isomorfismo de \mathbb{R} sobre $T_{\varphi(t)}(S)$. Uma vez que $\mu_S(\{(1, 0)\}) = 0$ e que $c_{D\varphi(t)} = \|\varphi'(t)\| = 1$, obtemos

$$\sigma_2 = \mu_S(\varphi([0, 2\pi])) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \square$$

I.4.6 Para cada $n \geq 0$, tem-se $\sigma_{n+2} = \frac{2\pi\sigma_n}{n+1}$.

Dem: Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n+1$ e F um espaço euclidiano de dimensão 2, e consideremos sobre o espaço vectorial $E \times F$, de dimensão $n+3$, a estrutura associada de espaço euclidiano. Notemos B_r , B'_r e B''_r as bolas fechadas de centro 0 e raio r em E , F e $E \times F$, respectivamente. Uma vez que, para cada $x \in E$, o conjunto $\{y \in F \mid (x, y) \in B''_1\}$ é vazio, se $x \notin B_1$, e é igual a B'_r , com $r = \sqrt{1 - \|x\|^2}$, se $x \in B_1$, caso em que este conjunto tem medida

$$\mu_F(B'_r) = \frac{\sigma_1 r^2}{2} = \pi r^2 = \pi(1 - \|x\|^2),$$

obtemos, pelo teorema de Fubini,

$$\frac{\sigma_{n+2}}{n+3} = \mu_{E \times F}(B''_1) = \int_{B_1} \pi(1 - \|x\|^2) d\mu_E(x),$$

donde, usando coordenadas polares generalizadas para calcular este integral, e notando S a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1 de E ,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{n+2}}{n+3} &= \int_0^1 \left(\int_S \pi t^n (1 - t^2) d\mu_S(y) \right) dt = \\ &= \int_0^1 \pi \sigma_n (t^n - t^{n+2}) dt = \pi \sigma_n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{2\pi \sigma_n}{(n+1)(n+3)}, \end{aligned}$$

pelo que a conclusão do enunciado resulta de multiplicar ambos os membros desta igualdade por $n+3$. \square

I.4.7 A título de exemplo de aplicação dos resultados anteriores, podemos apresentar a seguinte tabela com os primeiros valores de σ_n :

n	0	1	2	3	4	5	6
σ_n	2	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^2}{3}$	π^3	$\frac{16\pi^3}{15}$

§5. Teorema de Sard.

I.5.1 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo, com dimensões m e n , respectivamente, e seja $f: M \rightarrow \widehat{M}$ uma aplicação suave. Diz-se que um ponto $x \in M$ é um *ponto regular* de f se a aplicação linear $Df_x: T_x(M) \rightarrow T_{f(x)}(\widehat{M})$ é sobrejectiva; caso contrário, diz-se que x é um *ponto crítico* de f . Diz-se que um ponto $y \in \widehat{M}$ é um *valor regular* de f se, todos o $x \in f^{-1}(\{y\})$ são pontos regulares; caso contrário, isto é, se existe um ponto crítico $x \in f^{-1}(\{y\})$, diz-se que y é um *valor crítico* de f .

A importância dos valores regulares é que eles são os pontos $y \in \widehat{M}$ para os quais se pode garantir que a imagem recíproca $f^{-1}(\{y\})$ é uma subvariedade, eventualmente vazia, de M . O teorema de Sard, de que nos ocupamos nesta secção, vai garantir a existência de muitos valores regulares, provando mesmo que o conjunto dos valores críticos é de medida nula. Repare-se que, no caso em que $m < n$, todos os pontos de M são críticos, pelo que os valores regulares de f são simplesmente aqueles que não pertencem a $f(M)$.

I.5.2 (**Lema**) Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f: M \rightarrow \widehat{M}$ uma aplicação contínua. Seja $A \subset M$ um subconjunto *localmente fechado*, isto é, um conjunto que seja intersecção de um fechado de M com um aberto de M . Tem-se então que $f(A)$ é um boreliano de \widehat{M} .

Dem: Seja $A = U \cap B$, com U aberto em M e B fechado em M . O conjunto A é portanto fechado em U e, uma vez que U é uma variedade, podemos considerar, por I.2.5, uma família numerável de compactos K_p de união U . Tem-se então que A é a união numerável dos compactos $B \cap K_p$, pelo que $f(A)$ é a união numerável dos compactos $f(B \cap K_p)$, sendo assim um boreliano. \square

I.5.3 Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo, com dimensões m e n , respectivamente, e $f: M \rightarrow \widehat{M}$ uma aplicação suave. Tem-se então que o conjunto C dos pontos críticos de f é fechado em M e o conjunto $f(C)$ dos seus valores críticos é um boreliano de \widehat{M} .

Dem: Suponhamos que $x_0 \in M$ é um ponto regular de f . Pelo teorema da derivada sobrejectiva, podemos considerar um aberto U de M , com $x_0 \in U$, um aberto \widehat{U} de \widehat{M} , com $f(U) = \widehat{U}$, espaços vectoriais \widehat{F} e G , com dimensões n e $m - n$, respectivamente, abertos \widehat{V} de \widehat{F} e W de G , com $0 \in \widehat{V}$ e $0 \in W$, e difeomorfismos $\varphi: \widehat{V} \times W \rightarrow U$ e $\widehat{\varphi}: \widehat{V} \rightarrow \widehat{U}$, com $\varphi(0, 0) = x_0$ e $\widehat{\varphi}(0) = f(x_0)$, de modo que $\widehat{\varphi}^{-1} \circ f|_U \circ \varphi: \widehat{V} \times W \rightarrow \widehat{V}$ seja a primeira projecção. Para cada $(a, b) \in \widehat{V} \times W$, podemos então concluir que a com-

posta

$$D\widehat{\varphi}_{f(\varphi(a,b))} \circ Df_{\varphi(a,b)} \circ D\varphi_{(a,b)} = D(\widehat{\varphi}^{-1} \circ f|_U \circ \varphi)_{(a,b)}: \widehat{F} \times G \rightarrow \widehat{F}$$

vai ser a primeira projecção, em particular sobrejectiva, e portanto, uma vez que $D\widehat{\varphi}_{f(\varphi(a,b))}$ e $D\varphi_{(a,b)}$ são isomorfismos,

$$Df_{\varphi(a,b)}: T_{\varphi(a,b)}(M) \rightarrow T_{f(\varphi(a,b))}(\widehat{M})$$

vai ser uma aplicação linear sobrejectiva. Concluimos assim que U está contido no conjunto dos pontos regulares de f , o que mostra que este conjunto é aberto em M e portanto que C é fechado em M . Em particular, C é localmente fechado pelo que, pelo lema anterior, $f(C)$ é um boreliano de \widehat{M} . \square

I.5.4 Se $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ é uma variedade, podemos sempre considerar sobre \widehat{E} um produto interno, e dados dois produtos internos nessas condições, resulta de aplicar I.3.4 à identidade de \widehat{M} que os borelianos \widehat{A} de \widehat{M} , para os quais $\mu_{\widehat{M}}(\widehat{A}) = 0$, com a medida relativa a um dos produtos internos são os mesmos que têm medida nula relativamente ao outro. É assim legítimo falar de borelianos de medida nula de \widehat{M} , sem referir o produto interno de \widehat{E} que se está a considerar.

I.5.5 (**Lema**) Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f: M \rightarrow \widehat{M}$ uma aplicação contínua. Seja $A \subset M$ um subconjunto localmente fechado tal que, para cada $x \in A$, exista um aberto U de M , com $x \in U$ e $f(U \cap A)$ de medida nula (repare-se que $U \cap A$ é também localmente fechado, pelo que $f(U \cap A)$ é boreliano). Tem-se então que $f(A)$ tem medida nula.

Dem: Consideremos uma base numerável de abertos de M e sejam U_n , com $n \in \mathbb{N}$, os abertos U dessa base que verificam a propriedade de $f(U \cap A)$ ter medida nula. A condição do enunciado implica que $A \subset \bigcup U_n$, pelo que $f(A) = \bigcup f(A \cap U_n)$, pelo que o facto de cada $f(A \cap U_n)$ ter medida nula implica que $f(A)$ tem medida nula. \square

I.5.6 (**Teorema de Sard**) Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo, com dimensões m e n , respectivamente, e seja $f: M \rightarrow \widehat{M}$ uma aplicação suave. Sendo $C \subset M$ o conjunto dos pontos críticos de f , tem-se então que o conjunto $f(C)$, dos valores críticos de f , é um boreliano de medida nula de \widehat{M} .

Dem: A demonstração que apresentamos é baseada na que se encontra no livro de Milnor, citado na bibliografia. Para maior clareza, vamos dividi-la em várias alíneas:

a) Começemos por reparar que o resultado é trivialmente verdadeiro no caso em que $n = 0$. Com efeito, tem-se então que todos os pontos de M são trivialmente regulares, pelo que $C = \emptyset$ e $f(C) = \emptyset$. Nas alíneas seguintes vamos supor sempre que $n > 0$.

b) Vamos demonstrar o resultado por indução em m . Começemos por supor

que $m = 0$. Neste caso M é um conjunto finito ou numerável (cf. I.2.12). Resulta daqui que $f(M)$ é um conjunto finito ou numerável pelo que $f(C)$ é uma união finita ou numerável de conjunto unitários, que têm medida nula (cf. I.2.15), o que mostra que $f(C)$ tem medida nula.

c) Seja $m \geq 1$ tal que o resultado seja válido sempre que a variedade M tenha dimensão $m - 1$. Para terminar a demonstração, temos que ver que o resultado é ainda válido quando M tem dimensão m .

d) Vamos examinar agora o caso particular em que M é um aberto U de \mathbb{R}^m e em que \widehat{M} é \mathbb{R}^n . Consideramos portanto um aberto U de \mathbb{R}^m e uma aplicação suave $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com as componentes $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$, e notamos $C \subset U$ o conjunto dos pontos singulares de f , que sabemos ser fechado em U . Para cada inteiro $p \geq 1$, notamos C_p o subconjunto de C formado pelos pontos $x \in U$ tais que $D^k f_x = 0$, para cada $1 \leq k \leq p$. Os conjuntos C_p são evidentemente fechados em U , que verificam $C_p \supset C_{p+1}$, e notamos C_∞ a intersecção dos C_p , que é ainda fechada em U . Tem-se que C é a união de $C \setminus C_1$ com os conjuntos $C_p \setminus C_{p+1}$ e com C_∞ , conjuntos esses que são todos localmente fechados em U , pelo que $f(C)$ vai ser a união de $f(C \setminus C_1)$ com os $f(C_p \setminus C_{p+1})$ e com $f(C_\infty)$, pelo que, para ver que o boreliano $f(C)$ tem medida nula, basta verificarmos que têm medida nula os borelianos $f(C \setminus C_1)$, $f(C_p \setminus C_{p+1})$ e $f(C_\infty)$. É isso que vamos fazer nas três próximas alíneas.

e) Seja $x_0 \in C \setminus C_1$ arbitrário. Existe então $w \in \mathbb{R}^m$ tal que $Df_{x_0}(w) \neq 0$, e portanto, para alguma componente j , $Df_{jx_0}(w) \neq 0$. Por continuidade, podemos escolher um aberto V de U , com $x_0 \in V$, tal que, para cada $x \in V$, $Df_{jx}(w) \neq 0$. Para cada $b \in \mathbb{R}$, seja $M_b \subset V$,

$$M_b = \{x \in V \mid f_j(x) = b\},$$

que vai ser assim uma variedade de dimensão $m - 1$. Suponhamos que $y = (y_1, \dots, y_{j-1}, b, y_{j+1}, \dots, y_n)$ é um valor crítico de $f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^n$; vemos então que, existe $x \in M_b$ tal que $f(x) = y$ e $Df_x(\mathbb{R}^m) \neq \mathbb{R}^n$ e portanto, uma vez que $Df_x(\mathbb{R}^m)$ contém o vector $Df_x(w)$, que não pertence ao hiperplano $\mathbb{R}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{n-j}$ de \mathbb{R}^n , $Df_x(\mathbb{R}^m)$ não vai conter esse hiperplano, que não é mais do que $T_y(\mathbb{R}^{j-1} \times \{b\} \times \mathbb{R}^{n-j})$; y é portanto também um valor crítico da aplicação suave

$$f|_{M_b}: M_b \rightarrow \mathbb{R}^{j-1} \times \{b\} \times \mathbb{R}^{n-j};$$

compondo com o difeomorfismo canónico $\mathbb{R}^{j-1} \times \{b\} \times \mathbb{R}^{n-j} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, concluímos então que $(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)$ é um valor crítico da aplicação suave de M_b em \mathbb{R}^{n-1} , definida por

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_{j-1}(x), f_{j+1}(x), \dots, f_n(x)).$$

Pela hipótese de indução, concluímos que, para cada $b \in \mathbb{R}$, o conjunto D_b dos $(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tais que

$$(y_1, \dots, y_{j-1}, b, y_{j+1}, \dots, y_n) \in f(C \cap V)$$

tem medida nula em \mathbb{R}^{n-1} e podemos aplicar o teorema de Fubini para garantir que

$$\mu_n(f(C \cap V)) = \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(D_b) db = 0,$$

e portanto que também $\mu_n(f((C \setminus C_1) \cap V)) = 0$. Podemos agora aplicar o lema anterior para concluir que $\mu_n(f(C \setminus C_1)) = 0$.

f) Seja $x_0 \in C_p \setminus C_{p+1}$ arbitrário. Tem-se portanto $D^p f_{x_0} = 0$ e $D^{p+1} f_{x_0} \neq 0$, pelo que existem w_1, \dots, w_{p+1} em \mathbb{R}^m tais que $D^{p+1} f_{x_0}(w_1, \dots, w_{p+1}) \neq 0$ e podemos escolher uma componente j tal que $D^{p+1} f_{j x_0}(w_1, \dots, w_{p+1}) \neq 0$. Por continuidade, podemos escolher um aberto V de U , com $x_0 \in V$, tal que, para cada $x \in V$, $D^{p+1} f_{j x}(w_1, \dots, w_{p+1}) \neq 0$. Notemos $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por

$$g(x) = D^p f_{j x}(w_2, \dots, w_{p+1}).$$

Uma vez que, para cada $x \in V$, $Dg_x(w_1) \neq 0$, vemos que o conjunto $M = \{x \in V \mid g(x) = 0\}$ é uma variedade de dimensão $m - 1$. Mais uma vez pela hipótese de indução, o conjunto dos valores críticos de $f|_M: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem medida nula. Mas, para cada $x \in V \cap (C_p \setminus C_{p+1})$, vem $D^p f_x = 0$, em particular $g(x) = 0$, donde $x \in M$, e o facto de se ter $Df_x = 0$ implica que x é um ponto crítico de $f|_M$ e portanto $f(x)$ um valor crítico desta aplicação. Vemos portanto que $\mu_n(f(V \cap (C_p \setminus C_{p+1}))) = 0$ pelo que, mais uma vez pelo lema anterior, $f(C_p \setminus C_{p+1})$ tem medida nula.

g) Vamos utilizar nesta alínea as normas do máximo de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n como normas de trabalho, reparando que, se $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e $r > 0$, a bola fechada $\overline{B}_r(x)$ não é mais do que o produto de intervalos $\prod_{j=1}^m$

$$[x_j - r, x_j + r].$$

Seja $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0m}) \in C_\infty$ arbitrário e fixemos $r > 0$ tal que $\overline{B}_r(x_0) \subset U$. Mostremos, por indução em p , a existência, para cada $p \geq 0$, de um número real $R_p \geq 0$ tal que, sempre que $x \in \overline{B}_r(x_0) \cap C_\infty$ e $y \in \overline{B}_r(x_0)$, se tenha

$$\|f(y) - f(x)\| \leq R_p \|y - x\|^p.^2$$

Para $p = 0$, basta-nos tomar para R_0 o máximo da função contínua $\|f(y) - f(x)\|$ sobre o compacto $\overline{B}_r(x_0) \times \overline{B}_r(x_0)$. Suponhamos o resultado verdadeiro para um certo p e para qualquer aplicação suave definida em U e com valores num espaço vectorial normado de dimensão finita (a constante

²Esta demonstração por indução podia ser substituída por uma aplicação da fórmula de Taylor numa versão conveniente.

R_p dependendo evidentemente da função). Podemos então, para a função suave Df , que se anula nos pontos de C_∞ , escolher $\hat{R}_p \geq 0$ tal que, sempre que $x \in \overline{B}_r(x_0) \cap C_\infty$ e $y \in \overline{B}_r(x_0)$, se tenha

$$\|Df_y\| = \|Df_y - Df_x\| \leq \hat{R}_p \|y - x\|^p,$$

e deduzimos daqui, pelo teorema da média,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \hat{R}_p \|y - x\|^{p+1},$$

bastando-nos portanto tomar $R_{p+1} = \hat{R}_p$, para terminar a demonstração por indução da nossa asserção. Fixemos agora um natural $N \geq 1$ e reparemos que $\overline{B}_r(x_0)$ vai ser união dos N^m subconjuntos do tipo $\overline{B}_{r/N}(x_\alpha)$, com x_α da forma

$$(x_{01} - r + \frac{(2k_1 - 1)r}{N}, \dots, x_{0m} - r + \frac{(2k_m - 1)r}{N}),$$

com $1 \leq k_1 \leq N, \dots, 1 \leq k_m \leq N$ (olhar para cada uma destas bolas na forma de um produto de intervalos). Se α fôr um índice tal que em $\overline{B}_{r/N}(x_\alpha)$ exista um ponto $z \in C_\infty$, vem, para cada $x \in \overline{B}_{r/N}(x_\alpha)$,

$$\|f(x) - f(z)\| \leq R^p \|x - z\|^p \leq R_p \left(\frac{2r}{N}\right)^p,$$

o que mostra que $f(\overline{B}_{r/N}(x_\alpha)) \subset \overline{B}_R(f(z))$, com $R = R_p \left(\frac{2r}{N}\right)^p$, e portanto

$$\mu_n(f(\overline{B}_{r/N}(x_\alpha))) \leq (2R_p \left(\frac{2r}{N}\right)^p)^n$$

(atender, mais uma vez, à caracterização das bolas de \mathbb{R}^n como produtos de intervalos). Somando as desigualdades anteriores, para os índices α tais que $\overline{B}_{r/N}(x_\alpha) \cap C_\infty$ não é vazio, concluímos que

$$\mu_n(f(\overline{B}_r(x_0) \cap C_\infty)) \leq N^m (2R_p \left(\frac{2r}{N}\right)^p)^n = (2R_p (2r)^p)^n N^{m-pn}.$$

Fixando p tal que $m - pn < 0$, o segundo membro da desigualdade anterior converge para 0 quando N converge para $+\infty$, pelo que, passando ao limite essa desigualdade, concluímos que $\mu_n(f(\overline{B}_r(x_0) \cap C_\infty)) = 0$, donde também, para a bola aberta, $\mu_n(f(B_r(x_0) \cap C_\infty)) = 0$. Aplicando o lema anterior, concluímos agora que $f(C_\infty)$ tem medida nula.

h) Tal como observámos em d), o que vimos nas três últimas alíneas mostra que o teorema de Sard, com M de dimensão m , está demonstrado no caso particular em que M é um aberto de \mathbb{R}^m e \hat{M} é \mathbb{R}^n . Passemos, por fim, à demonstração no caso geral. Seja $x_0 \in C$ arbitrário. Sejam \hat{V} um aberto de \hat{M} , com $f(x_0) \in \hat{V}$, \hat{U} um aberto de \mathbb{R}^n e $\psi: \hat{V} \rightarrow \hat{U}$ um difeomorfismo. Sejam V um aberto de M , com $x_0 \in V$, U um aberto de \mathbb{R}^m e $\varphi: U \rightarrow V$ um

difeomorfismo; se necessário reduzindo estes abertos, podemos já supor que $f(V) \subset \widehat{V}$. O facto de a derivada de um difeomorfismo ser um isomorfismo implica, tendo em conta o teorema de derivação da função composta, que $x' \in U$ é um ponto crítico de $\psi \circ f|_V \circ \varphi: U \rightarrow \widehat{U} \subset \mathbb{R}^n$ se, e só se, $\varphi(x')$ é um ponto crítico de f , pelo que $f(C \cap V)$ é a imagem por ψ^{-1} do conjunto dos valores críticos de $\psi \circ f|_V \circ \varphi$, conjunto esse que tem medida nula, pelo caso particular já estudado. Concluimos assim, tendo em conta I.3.4, que $f(C \cap V)$ tem medida nula, pelo que, mais uma vez pelo lema anterior, $f(C)$ tem medida nula. \square

I.5.7 (Nota) Uma vez que a definição de ponto crítico ou de valor crítico apenas faz intervir a derivada de primeira ordem da função f , poderíamos ser levados a pensar na possibilidade de o teorema de Sard ser verdadeiro apenas com a exigência de f ser de classe C^1 . Se examinarmos a demonstração precedente, verificamos que tivemos necessidade de trabalhar com derivadas de ordem superior e, de facto, um exemplo clássico de Whitney (cf. [20]) mostra que a classe C^1 não é em geral suficiente. Com uma demonstração mais cuidadosa, pode-se verificar que o teorema é válido para as aplicações de classe C^p , onde o inteiro p depende apenas de m e n (cf. [4], problema 2 de XVI.23). Por exemplo, quando $m \leq n$, pode-se mostrar que a classe C^1 é suficiente.

I.5.8 (Corolário) Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo, com dimensões m e n , respectivamente, e seja $f: M \rightarrow \widehat{M}$ uma aplicação suave. Para cada aberto não vazio V de \widehat{M} , existe então um elemento $y \in V$ que seja valor regular de f .

Dem: Se isso não acontecesse, V estaria contido no conjunto dos valores críticos de f , que ia ter então medida estritamente positiva (cf. I.2.17). \square

I.5.9 (Corolário) Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo, com dimensões m e n , respectivamente, e seja $f: M \rightarrow \widehat{M}$ uma aplicação suave. Se $m < n$, tem-se então que $f(M)$ tem medida nula em \widehat{M} , tendo portanto, em particular, interior vazio em \widehat{M} .

Dem: Basta atender a que todos os elementos de $f(M)$ são trivialmente valores críticos de f . \square

EXERCÍCIOS

Ex I.1 Sejam E e F espaços euclidianos e $\xi: E \rightarrow F$ um isomorfismo. Seja x_1, \dots, x_n uma base de E , não obrigatoriamente ortonormada, e sejam, para $1 \leq i, j \leq n$, $g_{i,j} = \langle x_i, x_j \rangle$ e $g_{i,j} = \langle \xi(x_i), \xi(x_j) \rangle$. Mostrar que o coeficiente de dilatação c_ξ é então igual à raiz quadrada do quociente do determinante da matriz dos $g_{i,j}$ pelo determinante da matriz dos $g'_{i,j}$. **Sugestão:** Utilizar I.1.15,

compondo ξ com um isomorfismo $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow E$, que aplique o elemento e_i da base canônica em x_i .

Ex I.2 Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ um conjunto, $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo com mais que um elemento, e $f: J \rightarrow M$ um difeomorfismo. Mostrar que M é então uma variedade de dimensão 1 e que $\mu(M) = \int_J \|f'(t)\| dt$.

Ex I.3 Calcular $\mu(M)$, onde $M \subset \mathbb{R}^3$ é o hemisfério

$$M = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\},$$

que é uma variedade de dimensão 2. **Sugestão:** Mostrar que se tem $\mu(M) = \mu(M')$, onde M' é a variedade de dimensão 2,

$$M' = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}.$$

Ex I.4 (**Lema de Álgebra Linear**) Sejam dados n números, reais ou complexos, a_1, \dots, a_n , e consideremos a matriz do tipo $n \times n$, cujo elemento da linha i e coluna j é $\delta_{i,j} + a_i a_j$. Mostrar que o determinante desta matriz é igual a $1 + a_1^2 + \dots + a_n^2$. O que se poderá dizer, sem repetir a demonstração, sobre o determinante da matriz de elementos $\delta_{i,j} - a_i a_j$?

Ex I.5 Seja $M \subset \mathbb{R}^m$ uma variedade de dimensão m , seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave e seja $G \subset \mathbb{R}^{m+1}$ o respectivo gráfico,

$$G = \{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid x \in M, t = f(x)\}.$$

Mostrar que G é uma variedade de dimensão m e que

$$\mu(G) = \int_M \sqrt{1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)^2} d\mu_m(x_1, \dots, x_m).$$

Ex I.6 Calcular a área do elipsóide de revolução de \mathbb{R}^3 ,

$$M = \{(x, y, z) \mid 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2\}.$$

Ex I.7 Sejam E um espaço euclidiano, de dimensão $m \geq 1$, e $X \subset E$ um boreliano. Mostrar que se tem

$$\mu_E(X) = \int_0^{+\infty} \mu_{S_t}(S_t \cap X) dt,$$

onde, para cada $r > 0$, S_r é a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio r (variedade de dimensão $m - 1$).

Ex I.8 Sejam E um espaço euclidiano e $C \subset E$ um cone boreliano. Define-se então o *ângulo sólido* de C (ou simplesmente *ângulo*, se E tem dimensão 2) como sendo o número real maior ou igual a 0

$$\text{ang}(C) = \mu_S(S \cap C),$$

onde S é a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1 de E . Suponhamos agora que E tem dimensão 2, e sejam x e y dois vectores linearmente independentes de E . Seja C o conjunto dos vectores $sx + ty$, com $s, t \in [0, +\infty[$. Mostrar que C é um cone boreliano, que $0 < \text{ang}(C) < \pi$ e que

$$\cos(\text{ang}(C)) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Sugestão: Pode-se já supor que x e y têm norma 1. Considerar o real $\alpha \in]0, \pi[$ tal que $\cos(\alpha) = \langle x, y \rangle$ e o vector

$$w = \frac{1}{\sin(\alpha)}y - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}x.$$

Mostrar que x, w é uma base ortonormada de E e que tem lugar uma bijecção suave $f: [0, 2\pi[\rightarrow S$, definida por

$$f(t) = \cos(t)x + \sin(t)w.$$

Mostrar que se tem

$$f(t) = \frac{\sin(\alpha - t)}{\sin(\alpha)}x + \frac{\sin(t)}{\sin(\alpha)}y,$$

e deduzir que a restrição de f é um difeomorfismo de $[0, \alpha]$ sobre $C \cap S$.

Nota: Este exercício permite fazer a ponte entre a definição intuitiva de ângulo de dois vectores e a respectiva definição formal, feita a partir da equação $\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$.

Ex I.9 Seja E um espaço euclidiano de dimensão m . Para cada número real $\alpha > 0$, seja $f_\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação contínua, definida por

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^\alpha}.$$

Determinar para que valores de α a função f_α tem integral finito, relativamente à medida μ_E .

Ex I.10 Demonstrar a fórmula

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

tendo em conta a identidade $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} \times e^{-y^2}$ e calculando o integral desta função em \mathbb{R}^2 de dois modos distintos, utilizando, por um lado, o teorema de Fubini e, por outro lado, coordenadas polares (eventualmente

generalizadas). Utilizar um truque análogo para calcular, para cada inteiro $n \geq 0$, o integral $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$, em função das constantes σ_n .

Ex I.11 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão n e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m , compacta e não vazia. Chama-se então *centro de figura* ou *baricentro* de M o vector de E

$$\text{bar}(M) = \frac{1}{\mu(M)} \int_M x d\mu_M(x)$$

(reparar que se trata de um integral de uma função vectorial).

a) Mostrar que a definição anterior não apresenta problemas, isto é, que $\mu(M)$ é finito e não nulo e que a função integranda é efectivamente integrável;

b) Mostrar que, se $a \in E$, então $\text{bar}(a + M) = a + \text{bar}(M)$ (comportamento do baricentro com as translações);

c) Mostrar que, se $\xi: E \rightarrow E$ é um isomorfismo ortogonal ou uma homotetia, então $\text{bar}(\xi(M)) = \xi(\text{bar}(M))$;

d) Mostrar que, se $\xi: E \rightarrow E$ é um isomorfismo arbitrário, e se $m = n$, então $\text{bar}(\xi(M)) = \xi(\text{bar}(M))$;

e) No caso em que a variedade M tem um certo grau de simetria, pode-se, em geral, garantir *a priori* que o baricentro de M se localiza num certo subconjunto de E . Assim, por exemplo, ninguém terá a mínima dúvida em prever que o baricentro de um triângulo isósceles se encontra sobre a mediatriz da base e que o baricentro de um círculo ou de um quadrado se encontra no respectivo centro. Dar uma definição conveniente de elemento de simetria de uma variedade $M \subset E$, de modo a poder garantir que, se uma variedade M possui um tal elemento de simetria, então o seu baricentro pertence a esse elemento de simetria. No sentido de simplificar, limitar a definição ao caso em que o elemento de simetria é um subespaço vectorial de E , o caso geral, em que ele pode ser um subespaço afim, reduzindo-se a este, tendo em conta o comportamento do baricentro com as translações.

Ex I.12 Seja $A \subset]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ uma variedade de dimensão n (onde n pode ser 0, 1 ou 2). Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ o *conjunto de revolução* definido por A :

$$B = \{(x, y, z) \mid (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in A\}$$

(uma superfície de revolução, se $n = 1$, um sólido de revolução se $n = 2$).

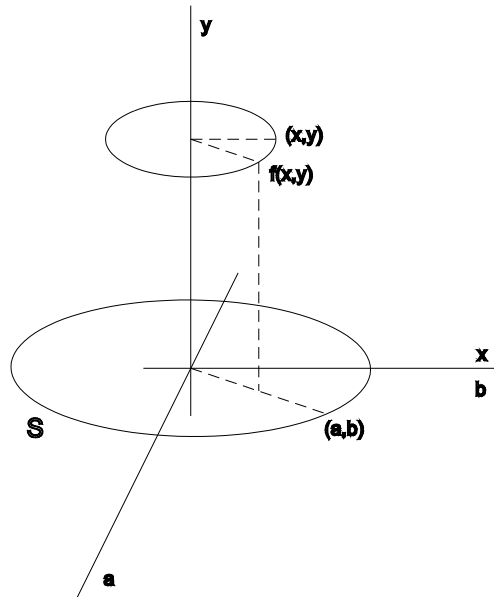


Figura 1

Mostrar que, sendo S a circunferência de centro 0 e raio 1 de \mathbb{R}^2 , B é uma variedade de dimensão $n + 1$, difeomorfa a $S \times A$, e que

$$\mu(B) = 2\pi \int_A x d\mu_A(x, y)$$

(cf. a figura 1).

Ex I.13 Verificar que o exercício anterior implica os dois teoremas seguintes (teoremas de Pappus):

1) A área descrita por uma curva plana, que roda em torno dum eixo desse plano, de um dos lados do qual ela está, é igual ao produto do comprimento da curva pelo perímetro da circunferência descrita pelo seu baricentro.

2) O volume do sólido de revolução, descrito por uma área plana, que roda em torno de um eixo, de um dos lados do qual ela está, é igual ao produto da área da figura pelo perímetro da circunferência descrita pelo seu baricentro.

Mostrar como estes resultados podem ser úteis, para determinar, sem contas, a área exterior e o volume de um anel de espessura $2r$ e diâmetro máximo $2r + 2R$, ou a localização do baricentro de um semi-círculo ou de uma semi-circunferência.

Ex I.14 Seja $n \geq 1$ e notemos S a hipersuperfície esférica de \mathbb{R}^{n+1} de centro 0 e raio 1. Consideremos a aplicação

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow S \cap (\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[),$$

definida por

$$f(z) = \left(\frac{z}{\sqrt{1 + \|z\|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \|z\|^2}} \right)$$

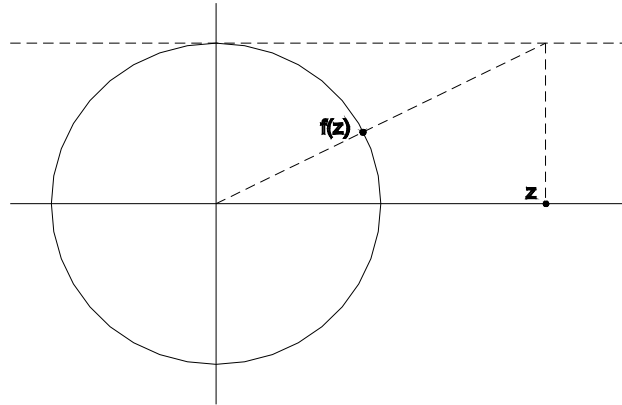


Figura 2

(aplicação inversa da *projecção central*). Mostrar que f é um difeomorfismo e calcule o coeficiente de dilatação $c_{Df(x)}$ (**Sugestão:** Exercício I.4). Utilizar este resultado para mostrar que se tem, para cada $n \geq 1$,

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} \times \int_0^{+\infty} \frac{2t^{n-1}}{(\sqrt{1+t^2})^{n+1}} dt.$$

Ex I.15 Seja $n \geq 1$ e notemos S a hipersuperfície esférica de \mathbb{R}^{n+1} , de centro 0 e raio 1. Consideremos a *projecção estereográfica*

$$f: S \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

definida por

$$f(x, t) = \frac{x}{1-t}$$

(onde se identifica \mathbb{R}^{n+1} a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$).

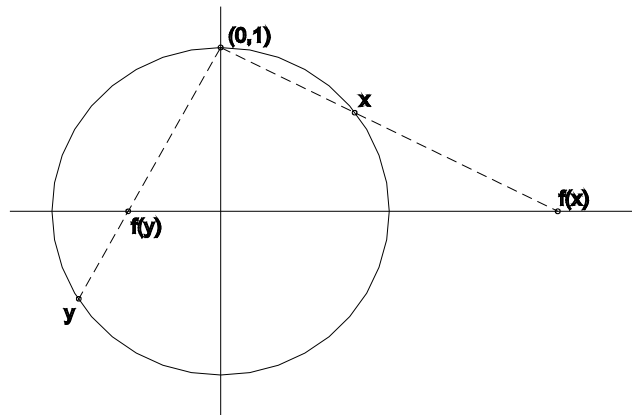


Figura 3

Mostrar que f é um difeomorfismo, e utilizar o difeomorfismo inverso para provar que

$$\sigma_n = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{2^n}{(1 + \|y\|^2)^n} dy.$$

Utilizando coordenadas esféricas generalizadas para calcular o integral anterior, obter a seguinte fórmula de recorrência:

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} \times \int_0^{+\infty} \frac{2^n t^{n-1}}{(1 + t^2)^n} dt.$$

Ex I.16 Seja $n \geq 1$ e notemos S e S' as hipersuperfícies esféricas de centro 0 e raio 1, de \mathbb{R}^{n+1} e de \mathbb{R}^n , respectivamente. Consideremos a aplicação

$$f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times S' \rightarrow S \setminus \{(0, 1), (0, -1)\},$$

definida por

$$f(t, x) = (\cos(t)x, \sin(t))$$

(podemos dizer que t é a *latitude* e x a *longitude generalizada* de $f(t, x)$).

a) Mostrar que f é um difeomorfismo e que

$$c_{Df(t,x)} = \cos(t)^{n-1}.$$

b) Utilizar a alínea anterior para mostrar que, para cada $n \geq 1$, tem lugar a

seguinte fórmula de recorrência

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{n-1} dt.$$

Ex I.17 (O integral paramétrico) Sejam E um espaço euclidiano, \widehat{E} um espaço vectorial de dimensão finita e $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades, a primeira das quais compacta e de dimensão m . Sejam F um espaço vectorial de dimensão finita e $f: M \times \widehat{M} \rightarrow F$ uma aplicação de classe C^1 .

a) Mostrar que tem lugar uma aplicação de classe C^1 , $g: \widehat{M} \rightarrow F$, definida por

$$g(y) = \int_M f(x, y) d\mu_M(x),$$

e que, para cada $y \in \widehat{M}$ e $w \in T_y(\widehat{M})$, tem-se

$$Dg_y(w) = \int_M D_2f_{(x,y)}(w) d\mu_M(x).$$

b) Mostrar que, no caso em que a aplicação f é de classe C^k (onde $1 \leq k \leq +\infty$), a aplicação g é também de classe C^k .

Sugestão: Considerando um aberto \widehat{U} de \widehat{E} , contendo \widehat{M} e tal que \widehat{M} seja fechado em \widehat{U} , f pode ser prolongada a $M \times \widehat{U}$, como aplicação de classe C^k , o que permite demonstrar apenas o caso particular em que \widehat{M} é um aberto de \widehat{E} . Do mesmo modo, sendo U um aberto de E , contendo M , tal que M seja fechado em U , f pode ser prolongada a $U \times \widehat{M}$, como aplicação de classe C^k . Fazendo uma indução em k , basta demonstrar o caso em que $k = 1$. Utilizando a continuidade uniforme, no sentido forte, de f sobre um compacto $M \times \{y_0\}$ e o facto de se ter $\mu(M) < +\infty$, demonstrar a continuidade de g em y_0 . Utilizando a continuidade uniforme, no sentido forte, de Df sobre um compacto $M \times \{y_0\}$, mostrar que, dado $\delta > 0$, vem, para y suficientemente próximo de y_0 e $x \in M$, $\|Df_{(x,y)} - Df_{(x_0,y_0)}\| \leq \delta$, aplicando, em seguida, o teorema da média para majorar

$$\|g(y) - g(y_0) - \int_M D_2f_{(x,y_0)}(y - y_0) d\mu_M(x)\|.$$

Ex I.18 (Teorema de Sard para variedades com bordo) Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ variedades, a segunda das quais sem bordo, e $f: M \rightarrow \widehat{M}$ uma aplicação suave. Generalizando o que foi feito no caso em que M também não tem bordo, dizemos que um ponto $x \in M$ é um *ponto regular* de f se, sendo $j \geq 0$ tal que $x \in \partial_j(M)$, x é um ponto regular da restrição $f|_{\partial_j(M)}: \partial_j(M) \rightarrow \widehat{M}$ e, caso contrário, dizemos que x é um *ponto crítico* de f . Como antes, chamam-se *valores críticos* de f aos elementos de \widehat{M} que são

imagem de algum ponto crítico e *valores regulares* de f aos restantes elementos de \widehat{M} . Mostrar que o conjunto dos valores críticos de f tem medida nula em \widehat{M} . **Sugestão:** Aplicar o teorema de Sard já estudado à restrição de f a cada um dos $\partial_j(M)$.

Ex I.19 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n , U um aberto de E e $K \subset U$ um conjunto compacto. Mostrar que existe uma variedade compacta, sem cantos, de dimensão n , $M \subset U$, tal que $K \subset \partial_0(M)$. **Sugestão:** Pelo teorema da partição da unidade, e depois de substituir eventualmente U por um aberto mais pequeno que seja limitado, considerar uma função suave $f: E \rightarrow [0, 1]$, nula fora duma certa parte compacta de U e tal que $f(x) = 1$, para cada $x \in K$. Construir a variedade M a partir dum valor regular de f no intervalo $]0, 1[$.

Ex I.20 Sejam E um espaço vectorial de dimensão m , $A \subset E$ uma variedade de dimensão n , eventualmente com bordo, F um espaço vectorial de dimensão N e $f: A \rightarrow F$ uma imersão injectiva, isto é, uma aplicação injectiva de classe C^∞ tal que, para cada $x \in A$, $Df_x: T_x(A) \rightarrow F$ seja uma aplicação linear injectiva.

a) Supondo que $N > 2n + 1$ e considerando em F um produto interno, mostrar que existe um subespaço vectorial $G \subset F$, com dimensão $N - 1$, tal que, sendo $\pi_G: F \rightarrow G$ a projecção ortogonal, a aplicação $\pi_G \circ f: A \rightarrow G$ seja ainda uma imersão injectiva. **Sugestão (cf. Guillemin e Pollack):** Considerar as aplicações suaves $g: A \times A \times \mathbb{R} \rightarrow F$ e $h: T(A) \rightarrow F$, definidas por $g(x, y, t) = t(f(x) - f(y))$ e $h(x, u) = Df_x(u)$, e utilizar o teorema de Sard para determinar $w \neq 0$ em F que não pertença à imagem de nenhuma daquelas aplicações. Tomar para G o espaço dos vectores ortogonais a w .

b) Raciocinando por indução, mostrar que existe uma imersão injectiva $h: A \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.

Ex I.21 Chama-se *grupo de Lie* a uma variedade $G \subset E$, munida de uma estrutura de grupo cuja multiplicação seja suave, enquanto aplicação $G \times G \rightarrow G$.

a) Se $G \subset E$ é um grupo de Lie, mostrar que, para cada $x \in G$, têm lugar difeomorfismos $L_x: G \rightarrow G$ e $R_x: G \rightarrow G$, definidos por $L_x(y) = x \cdot y$ e $R_x(y) = y \cdot x$. Deduzir daqui que um grupo de Lie é sempre uma variedade sem bordo e com a mesma dimensão em todos os pontos.

b) Sejam $G \subset E$ e $\widehat{G} \subset \widehat{E}$ grupos de Lie e $f: G \rightarrow \widehat{G}$ um morfismo de grupos suave. Sendo $e \in G$ e $\widehat{e} \in \widehat{G}$ os elementos neutros e $x \in G$, mostrar que a aplicação linear $Df_x: T_x(G) \rightarrow T_{f(x)}(\widehat{G})$ é injectiva (resp. sobrejectiva) se, e só se, a aplicação linear $Df_e: T_e(G) \rightarrow T_{\widehat{e}}(\widehat{G})$ for injectiva (resp. sobrejectiva). **Sugestão:** Verificar que a primeira pode ser obtida por composição da segunda com dois isomorfismos, um à esquerda e outro à direita.

c) Sejam $G \subset E$ e $\widehat{G} \subset \widehat{E}$ grupos de Lie e $f: G \rightarrow \widehat{G}$ um morfismo de

grupos suave e sobrejectivo. Utilizar o teorema de Sard e a alínea precedente para deduzir que a aplicação linear $Df_e: T_e(G) \rightarrow T_e(\widehat{G})$ é sobrejectiva.

CAPÍTULO II

Tópicos de Álgebra Multilinear

§1. Relações entre espaços vectoriais reais e complexos.

II.1.1. Ao longo desta exposição, todos os espaços vectoriais que vamos considerar serão espaços vectoriais reais ou complexos, e notaremos \mathbb{K} o respectivo corpo dos escalares, que é portanto \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Por vezes será natural considerar situações em que alguns dos espaços vectoriais de que falamos podem ser reais ou complexos e outros, de modo mais ou menos independente, podem também ser reais ou complexos. Para nos referirmos a uma situação deste tipo, diremos que temos uns espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e outros espaços vectoriais sobre \mathbb{K}' . Num tal contexto, quando escrevermos $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$, queremos significar que, ou \mathbb{K} e \mathbb{K}' coincidem, ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K}' = \mathbb{C}$.

II.1.2. Se E é um espaço vectorial complexo, E pode ser também olhado, de modo trivial, como espaço vectorial real. Basta, com efeito, ter em conta o facto de cada número real poder ser olhado como um número complexo. Do mesmo modo, se E e F são espaços vectoriais complexos, e se $\xi: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear, então ξ é também uma aplicação linear, quando se considera E e F como espaços vectoriais reais. Quando, ao falarmos de uma aplicação linear, for importante explicitar se estamos a considerar os espaços vectoriais envolvidos como sendo reais ou complexos, diremos respectivamente que temos uma aplicação linear real ou uma aplicação linear complexa.

II.1.3. Suponhamos que E é um espaço vectorial complexo. Vamos chamar aplicação de estrutura de E à aplicação linear $J: E \rightarrow E$, definida por $J(x) = ix$. Trata-se de uma aplicação linear complexa (portanto também uma aplicação linear real), que verifica a condição $J \circ J = -Id_E$.

II.1.4. Suponhamos que E é um espaço vectorial real e que $J: E \rightarrow E$ é uma aplicação linear (real, evidentemente), verificando $J \circ J = -Id_E$. Existe então sobre E uma, e uma só, estrutura de espaço vectorial complexo, cuja estrutura de espaço vectorial real associada seja a estrutura de partida e cuja aplicação de estrutura seja J . Mais precisamente, para cada complexo $c = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, e cada $x \in E$, tem-se $cx = ax + bJ(x)$.

Dem: É imediato constatar que a existir uma tal estrutura de espaço vectorial complexo, a multiplicação de um complexo $c = a + bi$ por um vector $x \in E$ não pode deixar de ser igual a $ax + bJ(x)$, o que implica em particular a afirmação de unicidade do enunciado. Definindo a multiplicação de um

complexo por um vector pela citada fórmula, a única propriedade um pouco menos trivial que é necessário verificar para vermos que temos uma estrutura de espaço vectorial complexo é a de que se tem $c(c'x) = (cc')x$. Ora, sendo $c = a + bi$ e $c' = a' + b'i$, obtemos

$$\begin{aligned} c(c'x) &= c(a'x + b'J(x)) = a(a'x + b'J(x)) + bJ(a'x + b'J(x)) = \\ &= aa'x + ab'J(x) + ba'J(x) + bb'J(J(x)) = \\ &= (aa' - bb')x + (ab' + ba')J(x) = \\ &= ((aa' - bb') + (ab' + ba')i)x = (cc')x. \end{aligned}$$

É agora trivial constatar que a estrutura de espaço vectorial real associada a esta estrutura de espaço vectorial complexo é a estrutura dada e que a aplicação de estrutura é precisamente J . \square

II.1.5. Tendo em conta o que acabamos de ver, chama-se *estrutura complexa* de um espaço vectorial real E a uma aplicação linear $J: E \rightarrow E$, verificando $J \circ J = -Id_E$. Concluímos portanto que é equivalente considerar um espaço vectorial complexo ou um espaço vectorial real, munido de uma estrutura complexa.

II.1.6. Sejam E e F espaços vectoriais complexos, com aplicações de estrutura J e J' , respectivamente. Se $\xi: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear real, tem-se que ξ é uma aplicação linear complexa se, e só se, para cada $x \in E$, se tem

$$\xi(J(x)) = J'(\xi(x)).$$

Dem: A condição necessária é evidente e, quanto à condição suficiente, dado um complexo $c = a + bi$, vemos que

$$\begin{aligned} \xi(cx) &= \xi(ax + bJ(x)) = a\xi(x) + b\xi(J(x)) = \\ &= a\xi(x) + bJ'(\xi(x)) = c\xi(x). \square \end{aligned}$$

II.1.7. Suponhamos que E é um espaço vectorial complexo, com aplicação de estrutura $J: E \rightarrow E$. É então imediato constatar que a aplicação linear $-J$ é também uma estrutura complexa sobre o espaço vectorial real associado. A estrutura de espaço vectorial complexo, definida por $-J$, diz-se *conjugada* da de partida, e usa-se a notação \overline{E} para notar o *espaço vectorial complexo conjugado* de E . Repare-se que, como é imediato constatar, o produto de um complexo c por um vector x , para a estrutura de \overline{E} , é igual ao produto do complexo conjugado \overline{c} por x , para a estrutura de E . Por vezes será cómodo usar a notação \overline{E} , no caso em que E é um espaço vectorial real, como significando o mesmo que E .

II.1.8. Se E é um espaço vectorial complexo, uma família $(x_j)_{j \in J}$ é linearmente independente, é geradora, ou é base se, e só se, isso acontecer em relação ao espaço vectorial complexo conjugado \overline{E} . No caso em que a família é uma base, as componentes de um vector $x \in E$ para a estrutura de \overline{E} são os

complexos conjugados das componentes para a estrutura de E .

Dem: Trata-se de uma consequência imediata das definições. \square

II.1.9. Dados os espaços vectoriais complexos E e F , com as aplicações de estrutura J e J' , chama-se *aplicação antilinear* de E em F a uma aplicação linear real $\xi: E \rightarrow F$, que verifica

$$\xi(J(x)) = -J'(\xi(x)).$$

É imediato constatar que as aplicações antilineares de E em F são precisamente a mesma coisa que as aplicações lineares complexas de \overline{E} em F e que as aplicações lineares complexas de E em \overline{F} . Em particular, uma aplicação linear real $\xi: E \rightarrow F$ é uma aplicação antilinear se, e só se, ela verifica $\xi(cx) = \overline{c}\xi(x)$, para cada $c \in \mathbb{C}$ e cada $x \in E$.

II.1.10. Seja E um espaço vectorial complexo, de dimensão finita ou infinita, e seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família de vectores de E . Tem-se então que esta família é linearmente independente, é geradora, ou é uma base, se, e só se, o mesmo acontecer à família formada pelos x_j e pelos ix_j , relativamente à estrutura de espaço vectorial real associada de E . Em particular, se E tiver dimensão finita n , como espaço vectorial complexo, então E tem dimensão $2n$, como espaço vectorial real.

Dem: Trata-se de uma consequência imediata das definições. \square

II.1.11. **(Corolário)** Se E é um espaço vectorial real de dimensão n , então E admite uma estrutura complexa se, e só se, n é par.

Dem: Pelo que acabámos de ver, se E tivesse dimensão infinita, como espaço vectorial complexo, então E tinha dimensão infinita, como espaço vectorial real, e se E tivesse dimensão k , como espaço vectorial complexo, então E tinha dimensão $2k$, como espaço vectorial real. Concluímos portanto que, se E admite uma estrutura complexa, então tem que ser $n = 2k$, pelo que n é par. Reciprocamente, se E tem dimensão $2k$, podemos considerar uma base x_1, \dots, x_{2k} e definir uma aplicação linear $J: E \rightarrow E$ por $J(x_{2j-1}) = x_{2j}$ e $J(x_{2j}) = -x_{2j-1}$ (lembrar que uma aplicação linear fica determinada, se dermos de modo arbitrário as imagens dos elementos de uma base), aplicação que se verifica imediatamente ser uma estrutura complexa de E . \square

§2. Espaços de aplicações multilineares.

II.2.1. Sejam E e F espaços vectoriais. Para cada $p \geq 1$, notaremos $L^p(E; F)$ o espaço vectorial cujos elementos são as aplicações p -lineares $\xi: E^p \rightarrow F$, isto é, as aplicações que, quando se fixam os valores de $p - 1$ das variáveis, são lineares na restante variável. É claro que, no caso em que $p = 1$, o espaço vectorial $L^1(E; F)$ não é mais do que o espaço das aplicações lineares de E

em F , espaço que será notado também $L(E; F)$. Para $p = 0$, pomos, por convenção, $L^0(E; F) = F$. Será útil olhar para esta convenção como um caso particular da definição geral, tendo em conta as seguintes observações: E^0 é um conjunto com um único elemento (a família vazia de vectores de E) e qualquer aplicação de E^0 em F vai ser 0-linear; podemos portanto identificar uma aplicação 0-linear de E^0 em F com o elemento de F , imagem do único elemento de E^0 por essa aplicação.

Nas observações que acabamos de fazer, admitimos três situações:

- a) E e F são espaços vectoriais reais; nesse caso $L^p(E; F)$ é um espaço vectorial real;
- b) E e F são espaços vectoriais complexos; nesse caso $L^p(E; F)$ é um espaço vectorial complexo;
- c) E é um espaço vectorial real e F é um espaço vectorial complexo; neste caso, $L^p(E; F)$ é o espaço das aplicações multilineares, no sentido real, mas tem uma estrutura natural de espaço vectorial complexo, que resulta da estrutura complexa de F (de facto, temos um subespaço vectorial complexo do espaço de todas as aplicações de E^p em F).

II.2.2. Quando quisermos tornar mais claro qual o sentido que se está a dar à expressão $L^p(E; F)$, escreveremos $L_{\mathbb{R}}^p(E; F)$ nos casos a) e c) e $L_{\mathbb{C}}^p(E; F)$ no caso b). Esta precisão é especialmente importante no caso em que E e F são espaços vectoriais complexos: nesse quadro é frequente considerarmos, para além do espaço das aplicações p -lineares complexas, o espaço das aplicações p -lineares reais, isto é o espaço que se obtém quando se considera E como espaço vectorial real; utilizamos então a notação $L_{\mathbb{C}}^p(E; F)$ para o primeiro espaço e a notação $L_{\mathbb{R}}^p(E; F)$ para o segundo. É claro que $L_{\mathbb{C}}^p(E; F)$ vai ser um subespaço vectorial complexo de $L_{\mathbb{R}}^p(E; F)$.

II.2.3. Se nos quisermos referir, de uma forma abreviada, a uma situação em que qualquer dos três casos a), b) e c), descritos em II.2.1, é permitido, diremos que E é um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e F um espaço vectorial sobre \mathbb{K}' , com $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$; nesse caso, como dissemos, $L^p(E; F) = L_{\mathbb{K}}^p(E; F)$ é um espaço vectorial sobre \mathbb{K}' .

O resultado que apresentamos em seguida é a generalização natural, para as aplicações multilineares, do resultado que diz que uma aplicação linear fica determinada se dermos, de modo arbitrário, as imagens dos elementos de uma dada base.

II.2.4. Sejam E e F espaços vectoriais, o primeiro dos quais munido de uma base $(x_j)_{j \in J}$. Sejam $p \geq 1$ e (y_{j_1, \dots, j_p}) uma família arbitrária de vectores de F , indexada em J^p . Existe então uma, e uma só, aplicação p -linear $\xi: E^p \rightarrow F$ tal que, quaisquer que sejam j_1, \dots, j_p em J ,

$$\xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) = y_{j_1, \dots, j_p}.$$

Mais precisamente, dados w_1, \dots, w_p em E , com $w_k = \sum_j a_{j,k} x_j$ (para cada k , os $a_{j,k}$ são nulos, salvo para um número finito de valores de j), tem-se

$$(*) \quad \xi(w_1, \dots, w_p) = \sum_{j_1, \dots, j_p} a_{j_1,1} a_{j_2,2} \cdots a_{j_p,p} y_{j_1, j_2, \dots, j_p},$$

em que as parcelas do somatório anterior são nulas, salvo para um número finito de valores de (j_1, \dots, j_p) .³

Dem: A unicidade de ξ e a fórmula (*) no enunciado resultam de que, se $\xi: E^p \rightarrow F$ é multilinear, e se $w_k = \sum_j a_{j,k} x_j$, então tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned} \xi(w_1, \dots, w_p) &= \sum_{j_1} a_{j_1,1} \xi(x_{j_1}, w_2, \dots, w_p) = \\ &= \sum_{j_1, j_2} a_{j_1,1} a_{j_2,2} \xi(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, w_p) = \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_p} a_{j_1,1} a_{j_2,2} \cdots a_{j_p,p} \xi(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_p}). \end{aligned}$$

Quanto à existência, definindo uma aplicação $\xi: E^p \rightarrow F$ pela igualdade (*) no enunciado, é fácil constatar que temos uma aplicação multilinear e que esta aplicação aplica $(x_{j_1}, \dots, x_{j_p})$ em y_{j_1, \dots, j_p} (reparar que a decomposição de x_k é $x_k = \sum_j \delta_{j,k} x_j$). \square

No que se segue, os espaços $L^p(E; F)$ que teremos ocasião de aplicar com mais frequência serão aqueles em que o espaço vectorial F é \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Por esse motivo, e no sentido de aligeirar a exposição, vamos limitar o nosso estudo ao desses casos particulares.

II.2.5. Suponhamos que E é um espaço vectorial de dimensão finita sobre \mathbb{K} , com uma base $(x_j)_{j \in J}$, e que $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Dado $p \geq 1$, notemos, para sistema (j_1, \dots, j_p) de p índices de J , $\xi_{j_1, \dots, j_p}: E^p \rightarrow \mathbb{K}'$ a aplicação p -linear definida por

$$\xi_{j_1, \dots, j_p}(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) = \delta_{j_1, k_1} \times \cdots \times \delta_{j_p, k_p},$$

ou seja, $\xi_{j_1, \dots, j_p}(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) = 1$ se, e só se, $j_1 = k_1, \dots, j_p = k_p$ e $\xi_{j_1, \dots, j_p}(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) = 0$ caso contrário.

³Para quem não tenha medo de raciocinar com o conjunto vazio, este resultado é também verdadeiro, e trivial, no caso em que $p = 0$. Comparar com as observações feitas em II.2.1, a propósito de $L^0(E; F)$.

Tem-se então que a família das aplicações lineares ξ_{j_1, \dots, j_p} é uma base do espaço vectorial $L^p(E; \mathbb{K}')$, sobre \mathbb{K}' (dita *base associada* às bases de partida), e, para cada $\xi \in L^p(E; \mathbb{K}')$, tem-se

$$\xi = \sum_{j_1, \dots, j_p} \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \xi_{j_1, \dots, j_p}.$$

Em particular, se E tem dimensão finita m , $L^p(E; \mathbb{K}')$ tem dimensão m^p .⁴

Dem: Dado $\xi \in L^p(E; \mathbb{K}')$, o facto de se ter

$$\xi = \sum_{j_1, \dots, j_p} \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \xi_{j_1, \dots, j_p}$$

resulta de que ambos os membros são aplicações multilineares de E^p em \mathbb{K}' que dão o mesmo resultado quando aplicados a qualquer $(x_{k_1}, \dots, x_{k_p})$ (reparar que a soma do segundo membro aplicada a este sistema de vectores vai ter apenas uma parcela não nula, a correspondente a $j_1 = k_1, \dots, j_p = k_p$). A unicidade da decomposição resulta de modo análogo, se repararmos que, se fosse

$$\xi = \sum_{j_1, \dots, j_p} a_{j_1, \dots, j_p} \xi_{j_1, \dots, j_p},$$

concluíamos, aplicando ambos os membros a $(x_{k_1}, \dots, x_{k_p})$, que se tinha $\xi(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) = a_{k_1, \dots, k_p}$. \square

II.2.6. Como caso particular do resultado precedente, se E é um espaço vectorial de dimensão m , sobre \mathbb{K} , com uma base $(x_j)_{j \in J}$ e se $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$, o espaço vectorial $L(E; \mathbb{K}')$, sobre \mathbb{K}' , tem dimensão m e uma *base associada*, constituída pelos ξ_j , com $j \in J$ onde a aplicação linear $\xi_j: E \rightarrow \mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ está definida pela condição de aplicar x_j em 1 e todos os restantes x_k em 0, tendo-se, para cada $\xi \in L(E; \mathbb{K}')$, $\xi = \sum \xi(x_j) \xi_j$.

Uma interpretação importante das aplicações lineares $\xi_j \in L(E; \mathbb{K})$ é a de que, para cada $x \in E$, os $\xi_j(x)$ não são mais do que as componentes de x na base dos x_j , isto é, que se tem

$$x = \sum \xi_j(x) x_j.$$

Dem: Sendo $x = \sum a_j x_j$, vem

$$\xi_k(x) = \sum a_j \xi_k(x_j) = \sum a_j \delta_{j,k} = a_k. \square$$

⁴Como anteriormente, e desde que olhemos as coisas com suficiente cuidado, este resultado é também válido, e trivial, para $p=0$. A base correspondente de $L^0(E; \mathbb{K}') = \mathbb{K}'$ é simplesmente constituída pelo único elemento $1 \in \mathbb{K}'$.

Como aplicação simples do resultado anterior, temos o resultado clássico sobre a existência de um isomorfismo de qualquer espaço vectorial de dimensão finita sobre o seu bidual.

II.2.7. Seja E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} . Existe então uma aplicação linear injectiva $\beta: E \rightarrow L(L(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$, de E no seu *bidual*, definida por

$$\beta(x)(\xi) = \xi(x),$$

aplicação essa que é um isomorfismo, no caso em que E tem dimensão finita.

Dem: É imediato que β é uma aplicação linear. Para vermos que β é injectiva, basta vermos que, dado $x \neq 0$ em E , existe $\xi \in L(E; \mathbb{K})$ tal que $\xi(x) \neq 0$, o que é uma consequência de II.2.4, visto que podemos considerar uma base de E tendo x como um dos seus elementos e tomar para ξ a aplicação linear definida pela condição de aplicar x em 1 e os restantes elementos da base em 0. Por fim, no caso em que E tem dimensão finita m , resulta do que vimos atrás que $L(L(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ tem também dimensão m , pelo que a aplicação linear injectiva β tem que ser um isomorfismo. \square

II.2.8. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e $p \geq 0$ e $q \geq 0$ dois inteiros. Existe então uma aplicação bilinear, entre espaços vectoriais sobre \mathbb{K}' ,

$$\otimes : L^p(E; \mathbb{K}') \times L^q(E; \mathbb{K}') \rightarrow L^{p+q}(E; \mathbb{K}'),$$

que a cada par (ξ, η) de aplicações multilineares $\xi: E^p \rightarrow \mathbb{K}'$ e $\eta: E^q \rightarrow \mathbb{K}'$, associa a aplicação multilinear $\xi \otimes \eta: E^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}'$, definida por

$$\xi \otimes \eta(w_1, \dots, w_{p+q}) = \xi(w_1, \dots, w_p) \times \eta(w_{p+1}, \dots, w_{p+q}).$$

Aos elementos de $L^p(E; \mathbb{K})$, no caso em que \mathbb{K} é o corpo dos escalares de E , costuma-se dar o nome de *tensores* (mais precisamente, *tensores covariantes*) de grau p sobre E . A $\xi \otimes \eta$ costuma-se dar o nome de *produto tensorial* de ξ e η .

II.2.9. No caso particular em que $p = 0$ ou $q = 0$, e portanto o correspondente espaço é \mathbb{K}' , o produto tensorial não vai ser mais do que a multiplicação, à esquerda ou à direita, pelos escalares. Esta afirmação será um caso particular da definição anterior, se repararmos no modo como se identifica uma aplicação de E^0 em \mathbb{K}' com um elemento de \mathbb{K}' , ou poderá alternativamente ser olhada como uma convenção por quem não se sentir bem com este tipo de raciocínios.

II.2.10. (**Associatividade**) Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e $p, q, r \geq 0$ três inteiros. Dados $\xi \in L^p(E; \mathbb{K}')$, $\eta \in L^q(E; \mathbb{K}')$ e $\rho \in L^r(E; \mathbb{K}')$, tem-se então

$$(\xi \otimes \eta) \otimes \rho = \xi \otimes (\eta \otimes \rho) \in L^{p+q+r}(E; \mathbb{K}').$$

Dem: Basta reparar que ambos os membros dão o mesmo resultado, a saber,

$$\xi(w_1, \dots, w_p) \eta(w_{p+1}, \dots, w_{p+q}) \rho(w_{p+q+1}, \dots, w_{p+q+r}),$$

quando aplicados a (w_1, \dots, w_{p+q+r}) . \square

II.2.11. Como é usual, sempre que tem lugar uma propriedade associativa, faz sentido referirmo-nos, sem parênteses, ao produto tensorial de k factores: Se, para cada $1 \leq j \leq k$, $\lambda_j \in L^{p_j}(E; \mathbb{K}')$, fica bem definido um produto tensorial

$$\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \dots \otimes \lambda_k \in L^{p_1+p_2+\dots+p_k}(E; \mathbb{K}').$$

II.2.12. No caso em que o espaço vectorial E tem dimensão finita e está munido de uma base $(x_j)_{j \in J}$, é imediato constatar que os elementos ξ_{j_1, \dots, j_p} da base associada de $L^p(E; \mathbb{K}')$ estão também definidos por

$$\xi_{j_1, \dots, j_p} = \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes \xi_{j_p}.$$

Note-se que, embora associativo, o produto tensorial não é, em geral, comutativo. Por exemplo, se ξ e η são tensores de grau 1, tem-se, em geral,

$$\xi \otimes \eta(x, y) = \xi(x)\eta(y) \neq \eta(x)\xi(y) = \eta \otimes \xi(x, y).$$

Tem-se, no entanto, $\xi \otimes \eta = \eta \otimes \xi$, no caso em que o grau de ξ é zero ou o grau de η é zero, visto que, em ambos os casos, temos a multiplicação de um escalar por uma aplicação multilinear.

II.2.13. Sejam E e F espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e $\lambda: E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Se $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$, existe então, para cada $p \geq 0$, uma aplicação linear entre espaços vectoriais sobre \mathbb{K}' ,

$$\lambda^*: L^p(F; \mathbb{K}') \rightarrow L^p(E; \mathbb{K}'),$$

definida por $\lambda^*(\xi) = \xi \circ \lambda^p$, isto é,

$$\lambda^*(\xi)(w_1, \dots, w_p) = \xi(\lambda(w_1), \dots, \lambda(w_p)).$$

Dizemos que $\lambda^*(\xi)$ é a *imagem recíproca* de ξ por meio de λ e que λ^* é a *aplicação linear dual* de λ .⁵

II.2.14. Um caso particular trivial, mas importante, de imagem recíproca é aquele em que E é um subespaço vectorial de F e tomamos para $\iota: E \rightarrow F$ a aplicação linear inclusão. A imagem recíproca $\iota^*(\xi)$ não é mais do que a

⁵É claro que, no caso em que $p = 0$, a aplicação linear λ^* não é mais do que a identidade de \mathbb{K}' .

restrição de ξ a E^p , restrição essa que é notada por vezes, um pouco abusivamente, $\xi|_{E^p}$.

II.2.15. Nas condições de II.2.13, suponhamos que G é outro espaço vectorial sobre \mathbb{K} , e que $\mu: F \rightarrow G$ é outra aplicação linear. É então imediato constatar-se que, considerando a composição $\mu \circ \lambda: E \rightarrow G$, tem-se

$$(\mu \circ \lambda)^* = \lambda^* \circ \mu^*: L^p(G; \mathbb{K}') \rightarrow L^p(E; \mathbb{K}').$$

Uma vez que é imediato que, considerando a aplicação idêntica $Id_E: E \rightarrow E$, $(Id_E)^*: L^p(E; \mathbb{K}') \rightarrow L^p(E; \mathbb{K}')$ é a aplicação idêntica, concluímos, com um argumento do tipo usual, que, se $\lambda: E \rightarrow F$ é um isomorfismo, então a aplicação linear dual $\lambda^*: L^p(F; \mathbb{K}') \rightarrow L^p(E; \mathbb{K}')$ é também um isomorfismo, tendo $(\lambda^{-1})^*$ como isomorfismo inverso.

II.2.16. Sejam os espaços vectoriais E e F , sobre \mathbb{K} , e a aplicação linear $\lambda: E \rightarrow F$. Sejam $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e $p, q \geq 0$. Dados $\xi \in L^p(F; \mathbb{K}')$ e $\eta \in L^q(F; \mathbb{K}')$, tem-se então

$$\lambda^*(\xi \otimes \eta) = \lambda^*(\xi) \otimes \lambda^*(\eta) \in L^{p+q}(E; \mathbb{K}').$$

Dem: Basta reparar que ambos os membros dão o mesmo resultado, a saber, $\xi(\lambda(w_1), \dots, \lambda(w_p))\eta(\lambda(w_{p+1}), \dots, \lambda(w_{p+q}))$, quando aplicados a um elemento arbitrário (w_1, \dots, w_{p+q}) de E^{p+q} . \square

§3. Grupo simétrico e sinal de uma permutação.

II.3.1. Para cada inteiro $n \geq 0$, chama-se *grupo simétrico* de ordem n ao grupo \mathfrak{S}_n das permutações de $\{1, \dots, n\}$. Para cada $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, isto é, para cada bijecção $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, define-se o *número de inversões* $\text{inv}(\sigma)$ como sendo o número de elementos do conjunto

$$\{(j, k) \mid j < k \text{ e } \sigma(j) > \sigma(k)\}.$$

A $\text{sg}(\sigma) = (-1)^{\text{inv}(\sigma)} \in \{-1, 1\}$ dá-se o nome de *sinal* ou *paridade* da permutação σ .

II.3.2. Sejam $n \geq 2$ e j, k dois elementos distintos de $\{1, \dots, n\}$. Nota-se então $(j \cdot k)$ a permutação de $\{1, \dots, n\}$, que aplica j em k , k em j e deixa fixos os restantes elementos. Às permutações do tipo $(j \cdot k)$ dá-se o nome de *transposições*, chamando-se *transposições consecutivas* aquelas que são da forma $(j \cdot j+1)$.

II.3.3. Toda a permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ pode ser obtida por composição de um número finito de transposições (considerando a aplicação idêntica como a composta da família vazia de transposições).

Dem: O resultado demonstra-se por indução em k , mostrando-se que ele é

verdadeiro para toda a permutação σ , que verifique $\sigma(j) = j$, para cada $1 \leq j \leq n - k$. Para $k = 0$, isto é evidente. Suponhamos que o resultado é verdadeiro para um certo k , e que a permutação σ verifica $\sigma(j) = j$, para cada $1 \leq j \leq n - (k + 1)$, assim como $\sigma(n - k) \neq n - k$. Tem-se então que $\rho = (\sigma(n - k) \cdot n - k) \circ \sigma$ verifica $\rho(j) = j$, para cada $1 \leq j \leq n - k$, e tem-se $\sigma = (\sigma(n - k) \cdot n - k) \circ \rho$, pelo que, tendo em conta a hipótese de indução, σ é a composição de um número finito de transposições. Fazendo $k = n$, obtemos a afirmação do enunciado. \square

II.3.4. Toda a transposição é composição de um número ímpar de transposições consecutivas.

Dem: Seja $\sigma = (j \cdot k)$, em que se pode já supor que $j < k$. Façamos a demonstração por indução em $k - j$. O resultado é evidente, se $k - j = 1$ e, para a passagem de indução, basta atender a que, se $k - j > 1$, tem-se

$$(j \cdot k) = (j \cdot j + 1) \circ (j + 1 \cdot k) \circ (j \cdot j + 1). \square$$

II.3.5. (**Lema**) Se $j \neq k$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ e $\rho = (j \cdot k) \circ \sigma$, tem-se $\text{sg}(\rho) = -\text{sg}(\sigma)$.

Dem: Tendo em conta o resultado anterior, podemos reduzir-nos ao caso em que $k = j + 1$. Ora, nesse caso, tem-se:

- a) Se $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(j + 1)$, então $\text{inv}(\rho) = \text{inv}(\sigma) + 1$;
- b) Se $\sigma^{-1}(j) > \sigma^{-1}(j + 1)$, então $\text{inv}(\rho) = \text{inv}(\sigma) - 1$;

em qualquer dos casos $\text{sg}(\rho) = -\text{sg}(\sigma)$. \square

II.3.6. (**Teorema de Bézout**) O sinal da aplicação idêntica é 1 e o sinal de uma transposição é -1 . Se σ e ρ são permutações, então

$$\text{sg}(\rho \circ \sigma) = \text{sg}(\rho) \text{sg}(\sigma).$$

Se σ é uma permutação, então $\text{sg}(\sigma^{-1}) = \text{sg}(\sigma)$.

Dem: É imediato que o sinal da permutação idêntica é 1 e daqui resulta, pelo lema anterior, que o sinal de uma transposição é -1 . Dadas agora duas permutações σ e ρ , podemos, por II.3.3, escrever $\rho = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_j$ e $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k$, com os ρ_α e os σ_β transposições; resulta então do lema anterior que $\text{sg}(\rho) = (-1)^j$ e $\text{sg}(\sigma) = (-1)^k$. Uma vez que

$$\rho \circ \sigma = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_j \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k,$$

sai agora, pelo mesmo lema,

$$\text{sg}(\rho \circ \sigma) = (-1)^{j+k} = (-1)^j (-1)^k = \text{sg}(\rho) \text{sg}(\sigma).$$

Por fim, o facto de ser $\text{sg}(\sigma^{-1}) = \text{sg}(\sigma)$ vem de que se tem $Id = \sigma \circ \sigma^{-1}$, donde $1 = \text{sg}(Id) = \text{sg}(\sigma) \text{sg}(\sigma^{-1})$, e atendemos a que $\text{sg}(\sigma)$ é um elemento de $\{-1, 1\}$, logo igual ao seu inverso. \square

II.3.7. Suponhamos, mais geralmente, que J e K são dois conjuntos totalmente ordenados com n elementos e que $\sigma: J \rightarrow K$ é uma bijecção. Define-se então o *número de inversões* $\text{inv}(\sigma)$ e o *sinal* $\text{sg}(\sigma)$ pelas mesmas fórmulas

que em II.3.1. É então imediato que, sendo $\lambda: \{1, \dots, n\} \rightarrow J$ e $\mu: \{1, \dots, n\} \rightarrow K$ as bijecções estritamente crescentes, $\text{inv}(\sigma)$ e $\text{sg}(\sigma)$ coincidem com o número de inversões e o sinal da permutação $\mu^{-1} \circ \sigma \circ \lambda \in \mathfrak{S}_n$. Resulta daqui imediatamente que, se J, K e L são conjuntos totalmente ordenados com n elementos, e se $\sigma: J \rightarrow K$ e $\rho: K \rightarrow L$ são duas bijecções, é ainda verdade que

$$\text{sg}(Id_J) = 1, \quad \text{sg}(\rho \circ \sigma) = \text{sg}(\rho) \text{sg}(\sigma), \quad \text{sg}(\sigma^{-1}) = \text{sg}(\sigma).$$

II.3.8. Seja $J \subset \{1, \dots, n\}$ um conjunto com k elementos. Definimos então o *sinal* ou *paridade* de J , $\text{sg}(J)$, como sendo o elemento $\text{sg}(\sigma) \in \{-1, 1\}$, em que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ é a permutação que aplica $\{1, \dots, k\}$ sobre J , de modo crescente, e aplica $\{k+1, \dots, n\}$ sobre $\{1, \dots, n\} \setminus J$, também de modo crescente.

Contando o número de inversões desta permutação σ , vemos que, se $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, com $j_1 < \dots < j_k$, tem-se

$$\text{sg}(J) = (-1)^{(j_1-1)+(j_2-2)+\dots+(j_k-k)}$$

(em particular, $\text{sg}(J)$ não depende de $n!$), sendo claro *a posteriori* que a fórmula anterior é ainda válida no caso em que $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, com os j_α distintos, mas não obrigatoriamente por ordem crescente.

Tem-se assim, por exemplo, $\text{sg}(\emptyset) = 1$, $\text{sg}(\{j\}) = (-1)^{j-1}$ e, para $j \neq k$, $\text{sg}(\{j, k\}) = (-1)^{j+k-1}$.

II.3.9. Seja $J \subset \{1, \dots, n\}$ um conjunto com k elementos. Tem-se então

$$\text{sg}(\{1, \dots, n\} \setminus J) = (-1)^{k(n-k)} \text{sg}(J).$$

Dem: Seja $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ a permutação que aplica $\{1, \dots, k\}$ sobre J , de modo crescente, e que é também crescente em $\{k+1, \dots, n\}$. Do mesmo modo, seja $\rho \in \mathfrak{S}_n$ a permutação que aplica $\{1, \dots, n-k\}$ sobre $\{1, \dots, n\} \setminus J$, de modo crescente, e que é também crescente em $\{n-k+1, \dots, n\}$. É então imediato constatar-se que se tem $\rho = \sigma \circ \nu$, onde ν é a permutação de $\{1, \dots, n\}$, que aplica $\{1, \dots, n-k\}$ sobre $\{k+1, \dots, n\}$, de modo crescente, e aplica $\{n-k+1, \dots, n\}$ sobre $\{1, \dots, k\}$, também de modo crescente. Reparando que $\text{inv}(\nu) = k(n-k)$, resulta agora, do teorema de Bézout, que

$$\begin{aligned} \text{sg}(\{1, \dots, n\} \setminus J) &= \text{sg}(\rho) = \text{sg}(\sigma) \text{sg}(\nu) = \\ &= (-1)^{k(n-k)} \text{sg}(\sigma) = (-1)^{k(n-k)} \text{sg}(J). \square \end{aligned}$$

II.3.10. Seja $\sigma: \{1, \dots, m+n\} \rightarrow \{1, \dots, m+n\}$ uma permutação. Vem então

$$\text{sg}(\sigma) = \text{sg}(\sigma|_{\{1, \dots, m\}}) \text{sg}(\sigma|_{\{m+1, \dots, m+n\}}) \text{sg}(\{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}).$$

Dem: O conjunto que define o número de inversões de σ vai ser a união disjunta de três subconjuntos, a saber:

- a) $\{(j, k) \in \{1, \dots, m\}^2 \mid j < k \text{ e } \sigma(j) > \sigma(k)\}$;
 b) $\{(j, k) \in \{m+1, \dots, m+n\}^2 \mid j < k \text{ e } \sigma(j) > \sigma(k)\}$;
 c) $\{(j, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{m+1, \dots, m+n\} \mid \sigma(j) > \sigma(k)\}$.

Os números de elementos do primeiro e do segundo conjuntos são, respectivamente, $\text{inv}(\sigma_{\{1, \dots, m\}})$ e $\text{inv}(\sigma_{\{m+1, \dots, m+n\}})$. Ficamos portanto reduzidos a provar que -1 elevado ao número de elementos do terceiro conjunto é igual a $\text{sg}(\{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\})$. Escrevamos, para isso,

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\} = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_m)\},$$

com $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_m)$. Constatamos então que o número de pares (j, k) em c) com $j = i_1$ é $\sigma(i_1) - 1$ (correspondentes aos k tais que $\sigma(k)$ está entre 1 e $\sigma(i_1)$, excluindo este), o número de pares com $j = i_2$ é $\sigma(i_2) - 2$ (correspondentes aos k tais que $\sigma(k)$ está entre 1 e $\sigma(i_2)$, excluindo $\sigma(i_1)$ e $\sigma(i_2)$), e assim sucessivamente, pelo que o número de elementos do conjunto em questão é igual a $(\sigma(i_1) - 1) + (\sigma(i_2) - 2) + \dots + (\sigma(i_m) - m)$ e -1 elevado a este número de elementos é, por II.3.8, igual a $\text{sg}(\{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\})$. \square

§4. Aplicações multilineares alternadas. O determinante.

II.4.1. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Para cada $p \geq 0$ e cada permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, tem então lugar uma aplicação linear entre espaços vectoriais sobre \mathbb{K}' ,

$$\hat{\sigma}: L^p(E; F) \rightarrow L^p(E; F),$$

definida por

$$\hat{\sigma}(\xi)(w_1, \dots, w_p) = \xi(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(p)}).$$

II.4.2. Sendo $Id \in \mathfrak{S}_p$ a permutação idêntica, então $\hat{Id}: L^p(E; F) \rightarrow L^p(E; F)$ é a aplicação idêntica. Sendo $\sigma, \rho \in \mathfrak{S}_p$ duas permutações, tem-se que

$$(\sigma \circ \rho)^\wedge = \hat{\sigma} \circ \hat{\rho}: L^p(E; F) \rightarrow L^p(E; F).$$

Em consequência, tem-se $(\sigma^{-1})^\wedge = \hat{\sigma}^{-1}$.

Dem: A primeira afirmação é trivial e a terceira é uma consequência das duas primeiras. Quanto à segunda, dados w_1, \dots, w_p em E , podemos notar, para cada $1 \leq j \leq p$, $y_j = w_{\sigma(j)}$, e obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\hat{\rho}(\xi))(w_1, \dots, w_p) &= \hat{\rho}(\xi)(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(p)}) = \hat{\rho}(\xi)(y_1, \dots, y_p) = \\ &= \xi(y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(p)}) = \xi(w_{\sigma(\rho(1))}, \dots, w_{\sigma(\rho(p))}) = \\ &= (\sigma \circ \rho)^\wedge(\xi)(w_1, \dots, w_p). \square \end{aligned}$$

II.4.3. Dados os espaços vectoriais E e F e a aplicação p -linear $\xi: E^p \rightarrow F$, são equivalentes as três propriedades seguintes:

a) Para cada $1 \leq j \leq p - 1$,

$$\xi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_p) = -\xi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_j, x_{j+2}, \dots, x_p),$$

quaisquer que sejam x_1, \dots, x_p em E ;

b) Para cada $j < k$,

$$\xi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_p) = -\xi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \dots, x_p),$$

quaisquer que sejam x_1, \dots, x_p em E ;

c) Para cada $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, tem-se $\widehat{\sigma}(\xi) = \text{sg}(\sigma)\xi$.

Dem: A propriedade a) é trivialmente um caso particular da propriedade b) e esta última é trivialmente a tradução do caso particular de c) em que se toma para σ a transposição $(j \cdot k)$, que sabemos ter sinal -1 . Resta-nos portanto supor que a propriedade a) é verificada e provar c). Para isso, consideremos o conjunto das permutações $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, para as quais a igualdade de c) é verificada. É evidente que esse conjunto contém a permutação identidade, que tem sinal 1 , e, por hipótese, ele contém as transposições consecutivas $(j \cdot j + 1)$, que têm sinal -1 . Por outro lado, se este conjunto contiver duas permutações σ e ρ , o resultado anterior e o teorema de Bézout mostram-nos que ele contém também $\sigma \circ \rho$. Uma vez que, por II.3.3 e II.3.4, toda a permutação é composição de um número finito de transposições consecutivas, concluímos que o conjunto em questão contém todas as permutações, o que mostra que a propriedade c) é verificada. \square

II.4.4. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Diz-se que uma aplicação p -linear $\xi: E^p \rightarrow F$ é *alternada* ou *anti-simétrica* se ela verifica as propriedades equivalentes referidas em II.4.3 (reparar que estas propriedades se encontram automaticamente verificadas, no caso em que $p = 0$ ou $p = 1$). Nota-se $A^p(E; F)$ o subconjunto de $L^p(E; F)$, formado pelas aplicações p -lineares alternadas, conjunto que é trivialmente um subespaço vectorial sobre \mathbb{K}' .

Em particular, tem-se $A^0(E; F) = L^0(E; F) = F$ e $A^1(E; F) = L(E; F)$.

II.4.5. De modo análogo, e embora isso não vá ter grande interesse neste curso, definem-se as aplicações p -lineares *simétricas*, como sendo as aplicações p -lineares $\xi: E^p \rightarrow F$, para as quais se tem $\widehat{\sigma}(\xi) = \xi$, para cada permutação σ . Uma demonstração inteiramente análoga à de II.4.3 mostra também que a condição anterior é equivalente a qualquer das propriedades, que se obtêm a partir das propriedades b) e c) daquele resultado, omitindo o sinal menos no segundo membro das respectivas igualdades. Usa-se a notação $S^p(E; F)$ para o subespaço vectorial de $L^p(E; F)$, cujos elementos são as aplicações p -lineares simétricas. Como antes, tem-se $S^0(E; F) = L^0(E; F) = F$ e $S^1(E; F) = L(E; F)$.

No nosso curso as aplicações multilineares alternadas jogarão um papel muito mais importante que o das aplicações multilineares simétricas. No entanto, muito do que for dito para as aplicações alternadas pode ser adaptado de modo trivial ao caso das aplicações simétricas, a demonstração vindo normalmente mesmo simplificada. Quando for esse o caso, faremos referência a essas adaptações sem apresentar demonstração. Os três resultados que seguem são contra-exemplos, em que a adaptação referida não é possível.

II.4.6. Sejam $\xi: E^p \rightarrow F$ uma aplicação multilinear alternada e $x_1, \dots, x_p \in E$ tais que exista $j \neq k$, com $x_j = x_k$. Tem-se então $\xi(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Dem: Basta atender a que, pela propriedade b) de II.4.3, tem-se

$$\xi(x_1, \dots, x_p) = -\xi(x_1, \dots, x_p). \square$$

II.4.7. Seja $\xi: E^p \rightarrow F$ uma aplicação multilinear alternada, e seja x_1, \dots, x_p um sistema linearmente dependente de vectores de E . Tem-se então $\xi(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Dem: Podemos já eliminar os casos triviais em que $p = 0$ ou $p = 1$, visto que, no primeiro caso, a família vazia de vectores é linearmente independente, e, no segundo caso, a conclusão correspondente é simplesmente que $\xi(0) = 0$, para cada aplicação linear $\xi: E \rightarrow F$. Supondo portanto $p \geq 2$, vem que existe j tal que x_j seja combinação linear dos restantes, e podemos então escrever, tendo em conta o resultado anterior,

$$\xi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{k \neq j} a_k \xi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \dots, x_p) = 0. \square$$

II.4.8. (**Corolário**) Sejam E um espaço vectorial de dimensão n , sobre \mathbb{K} , e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Para cada $p > n$, tem-se então $A^p(E; F) = \{0\}$.

Dem: Basta atender a que qualquer sistema de p vectores de E é linearmente dependente. \square

Vamos agora estudar um operador, que a cada $\xi \in L^p(E; F)$, associa uma aplicação multilinear alternada $\text{Alt}(\xi) \in A^p(E; F)$. Este operador vai ser uma projecção, no sentido que, quando ξ já é alternado, $\text{Alt}(\xi) = \xi$.

II.4.9. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Para cada $p \geq 0$, tem então lugar uma aplicação linear

$$\text{Alt}: L^p(E; F) \rightarrow A^p(E; F),$$

definida por

$$\text{Alt}(\xi) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \text{sg}(\sigma) \widehat{\sigma}(\xi).$$

Para cada $\xi \in L^p(E; F)$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, tem-se

$$\text{Alt}(\widehat{\sigma}(\xi)) = \widehat{\sigma}(\text{Alt}(\xi)) = \text{sg}(\sigma) \text{Alt}(\xi),$$

e vem $\text{Alt}(\xi) = \xi$, para cada $\xi \in A^p(E; F)$. Em particular, para $p = 0$ e $p = 1$, Alt é a aplicação idêntica.

Dem: É imediato que Alt é uma aplicação linear de $L^p(E; F)$ em $L^p(E; F)$. O facto de se ter $\text{Alt}(\xi) = \xi$, para cada $\xi \in A^p(E; F)$, vem de que \mathfrak{S}_p tem $p!$ elementos e de que, para um tal ξ , tem-se então $\widehat{\sigma}(\xi) = \text{sg}(\sigma) \xi$, para cada $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Se atendermos agora a que, para cada $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, têm lugar bijecções de \mathfrak{S}_p sobre \mathfrak{S}_p , que a cada ρ associam $\rho \circ \sigma$ e $\sigma \circ \rho$, respectivamente, vemos que

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\widehat{\sigma}(\xi)) &= \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_p} \text{sg}(\rho) \widehat{\rho}(\widehat{\sigma}(\xi)) = \text{sg}(\sigma) \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_p} \text{sg}(\rho \circ \sigma) (\rho \circ \sigma)^{\widehat{}}(\xi) = \\ &= \text{sg}(\sigma) \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \text{sg}(\tau) \widehat{\tau}(\xi) = \text{sg}(\sigma) \text{Alt}(\xi) \end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}(\text{Alt}(\xi)) &= \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_p} \text{sg}(\rho) \widehat{\rho}(\widehat{\sigma}(\xi)) = \text{sg}(\sigma) \frac{1}{p!} \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_p} \text{sg}(\sigma \circ \rho) (\sigma \circ \rho)^{\widehat{}}(\xi) = \\ &= \text{sg}(\sigma) \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \text{sg}(\tau) \widehat{\tau}(\xi) = \text{sg}(\sigma) \text{Alt}(\xi), \end{aligned}$$

esta última igualdade implicando, em particular, que vem $\text{Alt}(\xi) \in A^p(E; F)$, para cada $\xi \in L^p(E; F)$. \square

De modo análogo se pode mostrar que tem lugar uma aplicação linear

$$\text{Sym}: L^p(E; F) \rightarrow S^p(E; F),$$

definida por $\text{Sym}(\xi) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \widehat{\sigma}(\xi)$, a qual verifica $\text{Sym}(\xi) = \xi$, para cada

$\xi \in S^p(E; F)$, tendo-se, para cada $\xi \in L^p(E; F)$ e cada $\sigma \in \mathfrak{S}_p$,

$$\text{Sym}(\widehat{\sigma}(\xi)) = \widehat{\sigma}(\text{Sym}(\xi)) = \text{Sym}(\xi).$$

II.4.10. (Lema) Sejam E um espaço vectorial de dimensão m , sobre \mathbb{K} , com uma base $(x_j)_{1 \leq j \leq m}$, e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Consideremos $\xi, \eta \in A^p(E; F)$ tais que, quaisquer que sejam os índices $j_1 < j_2 < \dots < j_p$ em $\{1, \dots, m\}$, se tenha

$$\xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) = \eta(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}).$$

Tem-se então $\xi = \eta$.

Dem: Considerando a aplicação multilinear alternada $\xi - \eta$, vemos que basta demonstrar que, se $\xi \in A^p(E; F)$ é tal que, quaisquer que sejam $j_1 < \dots < j_p$ em $\{1, \dots, m\}$, se tenha $\xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) = 0$, então $\xi = 0$. Considerando um tal ξ , sabemos, por II.2.4, que, para ver que $\xi = 0$, basta ver que, quaisquer que sejam j_1, \dots, j_p em $\{1, \dots, m\}$, se tem $\xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) = 0$. Ora, se os elementos j_α não forem todos distintos, isso é uma consequência de II.4.6 e, se eles forem distintos, podemos escrever $\{j_1, \dots, j_p\} = \{k_1, \dots, k_p\}$, com $k_1 < \dots < k_p$, existindo então uma permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ tal que $j_\alpha = k_{\sigma(\alpha)}$, o que implica que

$$\xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) = \text{sg}(\sigma) \xi(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) = 0$$

(fazer $y_\alpha = x_{k_\alpha}$), e a demonstração está terminada. \square

Para as aplicações multilineares simétricas, vamos ter um resultado correspondente ao anterior, mas em que devemos ser um pouco mais cuidadosos, visto que já não é válido o resultado correspondente a II.4.6. Adaptando convenientemente a demonstração anterior, o que se pode ver é que, se ξ, η em $S^p(E; F)$ são tais que, quaisquer que sejam os índices $j_1 \leq \dots \leq j_p$ em $\{1, \dots, m\}$, se tenha

$$\xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) = \eta(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}),$$

então $\xi = \eta$.

II.4.11. Seja E um espaço vectorial de dimensão m sobre \mathbb{K} , com uma base $(x_j)_{1 \leq j \leq m}$. Sejam $0 \leq p \leq m$ e $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$, e consideremos a correspondente base de $L^p(E; \mathbb{K}')$, constituída pelos $\xi_{j_1, \dots, j_p}: E^p \rightarrow \mathbb{K}'$, onde $j_1, \dots, j_p \in \{1, \dots, m\}$ (cf. II.2.5). Seja, para cada $j_1 < \dots < j_p$ em $\{1, \dots, m\}$,

$$\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p} = p! \text{Alt}(\xi_{j_1, \dots, j_p}) \in A^p(E; \mathbb{K}').$$

Tem-se então:

a) Dados $j_1 < \dots < j_p$ e $k_1 < \dots < k_p$ em $\{1, \dots, m\}$,

$$\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) = \delta_{j_1, k_1} \times \dots \times \delta_{j_p, k_p};$$

b) Os $\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}$ constituem uma base de $A^p(E; \mathbb{K}')$, dita *base associada* à base dada, e, para cada $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}')$,

$$\xi = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}$$

(comparar com II.2.5);

c) Em particular, $A^p(E; \mathbb{K}')$ tem dimensão $\binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$;

d) Para $p = 1$, $\xi_{\wedge j} = \xi_j \in A^1(E; \mathbb{K}) = L(E; \mathbb{K})$.

Dem: Tendo em conta a definição da aplicação Alt, vemos que

$$\begin{aligned} \xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}) &= \sum_{\sigma} \text{sg}(\sigma) \xi_{j_1, \dots, j_p}(x_{k_{\sigma(1)}}, \dots, x_{k_{\sigma(p)}}) = \\ &= \delta_{j_1, k_1} \times \dots \times \delta_{j_p, k_p}, \end{aligned}$$

uma vez que, por as sucessões j_1, \dots, j_p e k_1, \dots, k_p serem estritamente crescentes, no somatório anterior só a parcela correspondente à permutação $\sigma = Id$ pode ser eventualmente não nula e que, mesmo essa, só não é nula no caso em que cada $j_i = k_i$, caso em que ela é igual a 1. Aplicando o lema anterior, vemos agora que cada $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}')$ é combinação linear dos $\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}$, com os coeficientes definidos no enunciado, visto que ambos os membros da igualdade respectiva são elementos de $A^p(E; \mathbb{K}')$, que dão o mesmo valor quando aplicados a cada $(x_{k_1}, \dots, x_{k_p})$, com $k_1 < \dots < k_p$. A unicidade de uma tal combinação linear estabelece-se do mesmo modo, pelo que concluímos b). Por fim, c) resulta de que o número de sucessões estritamente crescentes de elementos de $\{1, \dots, m\}$ é igual ao número de combinações de m elementos, tomados p a p . \square

A versão do resultado anterior, para os espaços de aplicações multilineares simétricas, é de enunciado mais complicado pelo que, uma vez que não teremos ocasião de a utilizar, não a enunciamos aqui.

Vamos agora apresentar um resultado simples, em que se constata qual o comportamento da operação de imagem recíproca, definida em II.2.13, relativamente às projecções Alt e aos espaços $A^p(E; \mathbb{K}')$. Estes resultados têm versões correspondentes evidentes, que nos abstermos de enunciar, para as projecções Sym e para os espaços $S^p(E; \mathbb{K}')$.

II.4.12. Sejam E e F espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e $\lambda: E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Se $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$, a aplicação linear $\lambda^*: L^p(F; \mathbb{K}') \rightarrow L^p(E; \mathbb{K}')$ verifica as seguintes propriedades:

a) Para cada $\xi \in L^p(F; \mathbb{K}')$ e $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, $\widehat{\sigma}(\lambda^*(\xi)) = \lambda^*(\widehat{\sigma}(\xi)) \in L^p(E; \mathbb{K}')$;

b) Para cada $\xi \in L^p(F; \mathbb{K}')$, $\text{Alt}(\lambda^*(\xi)) = \lambda^*(\text{Alt}(\xi)) \in A^p(E; \mathbb{K}')$;

c) Em particular, para cada $\xi \in A^p(F; \mathbb{K}')$, vem também $\lambda^*(\xi) \in A^p(E; \mathbb{K}')$.

Dem: Trata-se de uma consequência trivial das definições. \square

II.4.13. Tendo em conta o resultado anterior, para cada aplicação linear $\lambda: E \rightarrow F$, notaremos ainda λ^* a aplicação linear $A^p(F; \mathbb{K}') \rightarrow A^p(E; \mathbb{K}')$, restrição da aplicação $\lambda^*: L^p(F; \mathbb{K}') \rightarrow L^p(E; \mathbb{K}')$, sendo trivial que continua a ser válida a propriedade correspondente à enunciada em II.2.15.

II.4.14. Um caso particular importante de II.4.11 é aquele em que temos um espaço vectorial E , de dimensão m sobre \mathbb{K} , e consideramos $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e o

espaço vectorial sobre \mathbb{K}' , $A^m(E; \mathbb{K}')$ (tomamos portanto p igual à dimensão de E). Concluimos então que este espaço tem dimensão 1 e que, a cada base $(x_j)_{1 \leq j \leq m}$ de E , fica associada uma base de $A^m(E; \mathbb{K}')$, formada por um único vector $\xi_{\wedge 1, \dots, m}$.

II.4.15. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e $\xi \in A^p(E; F)$. Sejam x_1, \dots, x_p e y_1, \dots, y_p dois sistemas de vectores de E tais que, para uma certa matriz $(a_{k,j})$ de escalares, se tenha $y_j = \sum_k a_{k,j} x_k$. Tem-se então

$$\xi(y_1, \dots, y_p) = \det((a_{k,j})) \xi(x_1, \dots, x_p).$$

Dem: Tendo em conta a multilinearidade de ξ , podemos escrever

$$\xi(y_1, \dots, y_p) = \sum_{k_1, \dots, k_p} a_{k_1,1} \cdots a_{k_p,p} \xi(x_{k_1}, \dots, x_{k_p}).$$

Tendo em conta o facto de ξ ser alternada, vemos que todas as parcelas correspondentes a um sistema de índices k_1, \dots, k_p com alguma repetição são nulas, pelo que a expressão anterior pode ser escrita alternativamente na forma

$$\xi(y_1, \dots, y_p) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(p),p} \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}).$$

e portanto, atendendo mais uma vez ao facto de ξ ser alternada,

$$\begin{aligned} \xi(y_1, \dots, y_p) &= \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(p),p} \widehat{\sigma}(\xi)(x_1, \dots, x_p) = \\ &= \sum_{\sigma} \text{sg}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(p),p} \xi(x_1, \dots, x_p) = \det((a_{k,j})) \xi(x_1, \dots, x_p). \square \end{aligned}$$

II.4.16. O caso particular de II.4.14 em que $E = \mathbb{K}^m$ e em que consideramos a base canónica e_1, \dots, e_m deste espaço é especialmente interessante. O correspondente elemento $\xi_{\wedge 1, \dots, m} \in A^m(\mathbb{K}^m; \mathbb{K})$ toma o nome de *função determinante* e será notado \det .

A razão de ser desta nomenclatura está em que, dados os vectores w_1, \dots, w_m de \mathbb{K}^m , com

$$w_j = (a_{1,j}, \dots, a_{m,j}) = a_{1,j}e_1 + \cdots + a_{m,j}e_m,$$

$\det(w_1, \dots, w_m)$ vai ser o determinante da matriz dos $a_{k,j}$ (aquela cujas colunas são os w_j). Esta afirmação é clara para quem conheça a definição do determinante a partir das aplicações multilineares alternadas e é uma consequência do resultado precedente para quem prefira a definição mais clássica (lembrar que se tem $\xi_{\wedge 1, \dots, m}(e_1, \dots, e_m) = 1$).

II.4.17. Seja E um espaço vectorial de dimensão m sobre \mathbb{K} , e sejam x_1, \dots, x_m e y_1, \dots, y_m duas bases de E , com $y_j = \sum_k a_{k,j} x_k$. Notando então $\xi_{\wedge 1, \dots, m}$ e $\eta_{\wedge 1, \dots, m}$ os elementos das bases associadas de $A^m(E; \mathbb{K})$, tem-se

$$\xi_{\wedge 1, \dots, m} = \det((a_{k,j})) \eta_{\wedge 1, \dots, m}.$$

Dem: Aplicando II.4.11 e II.4.15, obtemos

$$\begin{aligned} \xi_{\wedge 1, \dots, m} &= \xi_{\wedge 1, \dots, m}(y_1, \dots, y_m) \eta_{\wedge 1, \dots, m} = \\ &= \det((a_{k,j})) \xi_{\wedge 1, \dots, m}(x_1, \dots, x_m) \eta_{\wedge 1, \dots, m} = \\ &= \det((a_{k,j})) \eta_{\wedge 1, \dots, m}. \square \end{aligned}$$

II.4.18. Suponhamos que E é um espaço vectorial de dimensão 1 sobre \mathbb{K} . Para cada aplicação linear $\lambda: E \rightarrow E$, existe então um, e um só, $a \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda = a \text{Id}_E$, isto é, tal que $\lambda(x) = ax$, para cada $x \in E$.

Dem: A unicidade de a nas condições do enunciado é trivial. Para provar a existência, fixamos $x_0 \in E$ não nulo, constituindo portanto uma base de E , e reparamos que se tem então $\lambda(x_0) = ax_0$, para um certo $a \in \mathbb{K}$. Para cada $x \in E$ vai existir $b \in \mathbb{K}$ tal que $x = bx_0$ e podemos então escrever

$$\lambda(x) = \lambda(bx_0) = b\lambda(x_0) = bax_0 = ax,$$

o que termina a demonstração. \square

II.4.19. Seja E um espaço vectorial de dimensão m , sobre \mathbb{K} , e seja $\lambda: E \rightarrow E$ uma aplicação linear. Tem-se então que $A^m(E; \mathbb{K})$ é um espaço vectorial de dimensão 1, sobre \mathbb{K} , e ficamos com uma aplicação linear $\lambda^*: A^m(E; \mathbb{K}) \rightarrow A^m(E; \mathbb{K})$. Define-se o *determinante* da aplicação linear λ , $\det(\lambda)$, como sendo o elemento de \mathbb{K} associado à aplicação linear λ^* . Por outras palavras, $\det(\lambda)$ é o único elemento de \mathbb{K} para o qual se tem

$$\lambda^*(\xi) = \det(\lambda) \xi,$$

para cada $\xi \in A^m(E; \mathbb{K})$.

II.4.20. Seja E um espaço vectorial de dimensão m sobre \mathbb{K} , com uma base x_1, \dots, x_m . Seja $\lambda: E \rightarrow E$ uma aplicação linear e sejam $a_{k,j}$ os elementos da matriz de λ na base considerada, isto é, os definidos por $\lambda(x_j) = \sum_k a_{k,j} x_k$.

Tem-se então $\det(\lambda) = \det((a_{k,j}))$.

Dem: Aplicando II.4.11 e II.4.15, obtemos

$$\begin{aligned} \det(\lambda) \xi_{\wedge 1, \dots, m} &= \lambda^*(\xi_{\wedge 1, \dots, m}) = \lambda^*(\xi_{\wedge 1, \dots, m})(x_1, \dots, x_m) \xi_{\wedge 1, \dots, m} = \\ &= \xi_{\wedge 1, \dots, m}(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)) \xi_{\wedge 1, \dots, m} = \\ &= \det((a_{k,j})) \xi_{\wedge 1, \dots, m}(x_1, \dots, x_m) \xi_{\wedge 1, \dots, m} = \\ &= \det((a_{k,j})) \xi_{\wedge 1, \dots, m}, \end{aligned}$$

donde o resultado. \square

II.4.21. No caso em que E é um espaço vectorial de dimensão 0 e $\lambda: E \rightarrow E$ é a única aplicação linear possível (a aplicação linear nula), tem-se $A^0(E; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ e a aplicação linear $\lambda^*: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ é a aplicação idêntica, o que nos permite concluir que $\det(\lambda) = 1$. Isto está de acordo com o facto⁶ de o determinante de uma matriz 0×0 ser igual a 1.

No caso em que o espaço vectorial E tem dimensão 1, sabemos que, para cada aplicação linear $\lambda: E \rightarrow E$, existe $a \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda(x) = ax$, tendo-se então, pelo resultado precedente, $\det(\lambda) = a$.

II.4.22. Sejam E um espaço vectorial de dimensão m sobre \mathbb{K} e $\lambda, \mu: E \rightarrow E$ duas aplicações lineares. Tem-se então:

a) $\det(Id_E) = 1$;

b) $\det(\mu \circ \lambda) = \det(\mu)\det(\lambda)$;⁷

c) Se λ é um isomorfismo, então $\det(\lambda) \neq 0$ e $\det(\lambda^{-1}) = \frac{1}{\det(\lambda)}$.

Dem: A alínea a) é trivial e a alínea c) é uma consequência de a) e b), visto que se tem $\lambda^{-1} \circ \lambda = Id_E$. Resta-nos verificar b) e, para isso, basta repararmos que, para cada $\xi \in A^m(E; \mathbb{K})$, vem

$$(\mu \circ \lambda)^*(\xi) = \lambda^*(\mu^*(\xi)) = \det(\lambda)\mu^*(\xi) = \det(\mu)\det(\lambda)\xi. \square$$

II.4.23. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e F e G dois subespaços vectoriais de E tais que tenha lugar a soma directa $E = F \oplus G$. Seja $\lambda: E \rightarrow E$ uma aplicação linear tal que $\lambda(F) \subset F$ e $\lambda(G) \subset G$. Tem-se então

$$\det(\lambda) = \det(\lambda|_F) \det(\lambda|_G).$$

Dem: Sejam x_1, \dots, x_p uma base de F e x_{p+1}, \dots, x_{p+q} uma base de G . Tem-se portanto que x_1, \dots, x_{p+q} é uma base de E , e podemos considerar a correspondente base de $A^{p+q}(E; \mathbb{K})$, formada pelo único elemento $\xi = \xi_{\wedge 1, \dots, p+q}$. Sejam $\xi' \in A^p(F; \mathbb{K})$ e $\xi'' \in A^q(G; \mathbb{K})$ as aplicações multilineares alternadas definidas por

$$\begin{aligned} \xi'(w_1, \dots, w_p) &= \xi(w_1, \dots, w_p, \lambda(x_{p+1}), \dots, \lambda(x_{p+q})), \\ \xi''(w_{p+1}, \dots, w_{p+q}) &= \xi(x_1, \dots, x_p, w_{p+1}, \dots, w_{p+q}). \end{aligned}$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \xi(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_{p+q})) &= \xi'(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_p)) = \\ &= (\lambda|_F)^*(\xi')(x_1, \dots, x_p) = \\ &= \det(\lambda|_F) \xi'(x_1, \dots, x_p) = \\ &= \det(\lambda|_F) \xi''(\lambda(x_{p+1}), \dots, \lambda(x_{p+q})) = \end{aligned}$$

⁶Que, infelizmente, nem toda a gente considera como evidente.

⁷Para quem ainda o não soubesse, este resultado permite concluir que o determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos respectivos determinantes.

$$\begin{aligned}
&= \det(\lambda_{/F}) (\lambda_{/G})^* (\xi'')(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \\
&= \det(\lambda_{/F}) \det(\lambda_{/G}) \xi''(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \\
&= \det(\lambda_{/F}) \det(\lambda_{/G}) \xi(x_1, \dots, x_{p+q}) = \\
&= \det(\lambda_{/F}) \det(\lambda_{/G}),
\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\lambda^*(\xi) &= \lambda^*(\xi)(x_1, \dots, x_{p+q}) \xi = \xi(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_{p+q})) \xi = \\
&= \det(\lambda_{/F}) \det(\lambda_{/G}) \xi,
\end{aligned}$$

donde o resultado. \square

§5. Produto exterior.

II.5.1. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e $p, q \geq 0$ dois inteiros. Dados $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}')$ e $\eta \in A^q(E; \mathbb{K}')$, definimos em II.2.8 o produto tensorial $\xi \otimes \eta \in L^{p+q}(E; \mathbb{K}')$, que, em geral, não será uma aplicação multilinear alternada. Define-se então o *produto exterior* $\xi \wedge \eta \in A^{p+q}(E; \mathbb{K}')$, como sendo a aplicação multilinear alternada

$$\xi \wedge \eta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}(\xi \otimes \eta).^8$$

É imediato que fica assim definida uma aplicação bilinear

$$\wedge : A^p(E; \mathbb{K}') \times A^q(E; \mathbb{K}') \rightarrow A^{p+q}(E; \mathbb{K}').$$

II.5.2. No caso em que $p = 0$ ou $q = 0$, sabemos que o produto tensorial não é mais do que a multiplicação pelos escalares. Uma vez que $0! = 1$ e que o produto de uma aplicação multilinear alternada por um escalar é ainda uma aplicação multilinear alternada, concluímos que, neste caso, o produto exterior é também a multiplicação pelos escalares.

Quando se estudou o produto tensorial, viu-se que esta operação é, em geral, não comutativa. Vamos agora ver que, nesse aspecto, o produto exterior comporta-se bastante melhor: Embora ele não seja propriamente comutativo, pode-se dizer que é mais ou menos comutativo, no sentido que precisaremos adiante. Começemos por provar o seguinte lema:

⁸Não é muito clara qual a necessidade de introduzir o factor multiplicativo $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ nesta definição, e, de facto, alguns autores (e. g. Kobayashi e Nomizu) não o introduzem. A sua utilização vai, no entanto, contribuir para simplificar algumas fórmulas mais adiante e, talvez por esse motivo, a convenção que seguimos parece estar de acordo com a tendência actual.

II.5.3. **(Lema)** Dados $\xi \in L^p(E; \mathbb{K}')$ e $\eta \in L^q(E; \mathbb{K}')$, tem-se

$$\text{Alt}(\eta \otimes \xi) = (-1)^{pq} \text{Alt}(\xi \otimes \eta).$$

Dem: Dados x_1, \dots, x_{p+q} em E , vem

$$\begin{aligned} \eta \otimes \xi(x_1, \dots, x_{p+q}) &= \eta(x_1, \dots, x_q) \xi(x_{q+1}, \dots, x_{p+q}) = \\ &= \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) = \\ &= \xi \otimes \eta(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) = \widehat{\sigma}(\xi \otimes \eta)(x_1, \dots, x_{p+q}), \end{aligned}$$

onde $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$ é a permutação definida por $\sigma(1) = q+1, \dots, \sigma(p) = p+q, \sigma(p+1) = 1, \dots, \sigma(p+q) = q$. Tem-se portanto $\eta \otimes \xi = \widehat{\sigma}(\xi \otimes \eta)$ e, contando o número de inversões de σ , constata-se que $\text{sg}(\sigma) = (-1)^{pq}$, pelo que o resultado é uma consequência de II.4.9. \square

II.5.4. **(\pm -comutatividade)** Dados $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}')$ e $\eta \in A^q(E; \mathbb{K}')$, tem-se

$$\eta \wedge \xi = (-1)^{pq} \xi \wedge \eta.$$

Dem: Trata-se de uma consequência imediata da definição e do lema anterior. \square

Tal como acontecia na secção anterior, a definição e os resultados precedentes estendem-se naturalmente ao quadro das aplicações multilineares simétricas, com enunciados que vêm eventualmente ainda mais simples. Em vez do produto exterior, temos uma aplicação bilinear

$$\odot : S^p(E; \mathbb{K}') \times S^q(E; \mathbb{K}') \rightarrow S^{p+q}(E; \mathbb{K}'),$$

chamada produto tensorial simétrico, definida por

$$\xi \odot \eta = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Sym}(\xi \otimes \eta),$$

esta operação sendo mesmo comutativa, no sentido que se tem $\xi \odot \eta = \eta \odot \xi$. Do mesmo modo, mais geralmente, para $\xi \in L^p(E; \mathbb{K}')$ e $\eta \in L^q(E; \mathbb{K}')$, tem-se $\text{Sym}(\eta \otimes \xi) = \text{Sym}(\xi \otimes \eta)$.

A propriedade associativa, que vimos ser válida para o produto tensorial, continua a ser válida para o produto exterior, mas agora com uma demonstração muito menos trivial. Começamos por demonstrar o seguinte lema:

II.5.5. **(Lema)** Sejam $\xi \in L^p(E; \mathbb{K}')$ e $\eta \in L^q(E; \mathbb{K}')$, tais que, ou $\text{Alt}(\xi) = 0$, ou $\text{Alt}(\eta) = 0$. Tem-se então $\text{Alt}(\xi \otimes \eta) = 0$.

Dem: Vamos começar por demonstrar o resultado no caso em que $\text{Alt}(\eta) = 0$. Temos que provar que $\text{Alt}(\xi \otimes \eta)(x_1, \dots, x_{p+q}) = 0$, ou seja, que

$$0 = \sum_{\sigma} \text{sg}(\sigma) \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}).$$

Para cada aplicação injectiva $\sigma_0: \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, p+q\}$, notemos \mathfrak{S}' a parte de \mathfrak{S}_{p+q} , constituída pelas bijecções σ , cuja restrição a $\{1, \dots, p\}$ seja σ_0 ; para demonstrar a igualdade anterior, basta evidentemente demonstrar que, para cada σ_0 , é nulo o somatório em questão, quando estendido apenas às permutações $\sigma \in \mathfrak{S}'$, para o que será suficiente ver que se tem

$$0 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}'} \text{sg}(\sigma) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}).$$

Uma vez que, tendo em conta II.3.10, tem-se, para cada $\sigma \in \mathfrak{S}'$,

$$\text{sg}(\sigma) = \text{sg}(\sigma_0) \text{sg}(\{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}) \text{sg}(\sigma_{/\{p+1, \dots, p+q\}}),$$

vemos que a igualdade anterior é equivalente à igualdade

$$0 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}'} \text{sg}(\sigma_{/\{p+1, \dots, p+q\}}) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}).$$

Ora, fixado σ_0 , notemos $\sigma'(1) < \dots < \sigma'(q)$ os elementos do conjunto $J = \{1, \dots, p+q\} \setminus \{\sigma_0(1), \dots, \sigma_0(p)\}$ e ν a bijecção estritamente crescente de $\{1, \dots, q\}$ sobre $\{p+1, \dots, p+q\}$. Tem então lugar uma bijecção de \mathfrak{S}' sobre \mathfrak{S}_q , que a cada σ associa $\sigma'^{-1} \circ \sigma_{/\{p+1, \dots, p+q\}} \circ \nu$. O facto de σ' e ν serem crescentes, implica que

$$\text{sg}(\sigma'^{-1} \circ \sigma_{/\{p+1, \dots, p+q\}} \circ \nu) = \text{sg}(\sigma_{/\{p+1, \dots, p+q\}}),$$

pelo que, notando, para cada $1 \leq j \leq p$, $y_j = x_{\sigma'(j)}$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}'} \text{sg}(\sigma_{/\{p+1, \dots, p+q\}}) \eta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) &= \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}'} \text{sg}(\sigma'^{-1} \circ \sigma \circ \nu) \eta(y_{\sigma'^{-1} \circ \sigma \circ \nu(1)}, \dots, y_{\sigma'^{-1} \circ \sigma \circ \nu(q)}) = \\ &= q! \text{Alt}(\eta)(y_1, \dots, y_q) = 0, \end{aligned}$$

o que termina a demonstração, no caso em que $\text{Alt}(\eta) = 0$. O caso em que $\text{Alt}(\xi) = 0$ reduz-se ao caso já estudado, visto que, por II.5.3, tem-se $\text{Alt}(\xi \otimes \eta) = (-1)^{pq} \text{Alt}(\eta \otimes \xi)$. \square

II.5.6. (Associatividade) Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$, e os tensores alternados $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}')$, $\eta \in A^q(E; \mathbb{K}')$ e $\zeta \in A^r(E; \mathbb{K}')$. Tem-se então

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta) = \frac{(p+q+r)!}{p! q! r!} \text{Alt}(\xi \otimes \eta \otimes \zeta) \in A^{p+q+r}(E; \mathbb{K}').$$

Dem: Vamos demonstrar que se tem

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \text{Alt}((\xi \otimes \eta) \otimes \zeta).$$

De maneira análoga se demonstraria que

$$\xi \wedge (\eta \wedge \zeta) = \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \text{Alt}(\xi \otimes (\eta \otimes \zeta)),$$

pelo que o resultado será então uma consequência da associatividade do produto tensorial. Ora, tem-se

$$\begin{aligned} (\xi \wedge \eta) \wedge \zeta &= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!} \text{Alt}((\xi \wedge \eta) \wedge \zeta) = \\ &= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!} \text{Alt}(\text{Alt}(\xi \otimes \eta) \otimes \zeta), \end{aligned}$$

pelo que, para provarmos a igualdade referida, tudo o que temos que ver é que

$$\text{Alt}((\xi \otimes \eta) \otimes \zeta) = \text{Alt}(\text{Alt}(\xi \otimes \eta) \otimes \zeta),$$

ou seja, que

$$\text{Alt}(((\xi \otimes \eta) - \text{Alt}(\xi \otimes \eta)) \otimes \zeta) = 0.$$

Mas isto é uma consequência do lema anterior, visto que

$$\begin{aligned} \text{Alt}((\xi \otimes \eta) - \text{Alt}(\xi \otimes \eta)) &= \text{Alt}(\xi \otimes \eta) - \text{Alt}(\text{Alt}(\xi \otimes \eta)) = \\ &= \text{Alt}(\xi \otimes \eta) - \text{Alt}(\xi \otimes \eta) = 0 \end{aligned}$$

(lembrar que $\text{Alt}(\xi \otimes \eta)$ é alternado e que Alt é a identidade no espaço dos tensores alternados). \square

II.5.7. O facto de ser válida a propriedade associativa permite-nos, dados, para cada $1 \leq j \leq n$, $\xi_j \in A^{p_j}(E; \mathbb{K}')$, definir um produto exterior, sem parênteses,

$$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n \in A^{p_1 + \cdots + p_n}(E; \mathbb{K}').$$

Tem então lugar a seguinte fórmula explícita para esse produto exterior:

$$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n = \frac{(p_1 + \cdots + p_n)!}{p_1! \cdots p_n!} \text{Alt}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n).$$

Dem: A demonstração faz-se por indução em n . O caso $n = 1$ é trivial e o caso $n = 2$ não é mais do que a definição do produto exterior. Supondo que o resultado é válido para n factores, a demonstração de que ele é válido para $n + 1$ factores é decalcada pelo que fizemos na demonstração precedente (o

que aí fizémos foi mostrar que o resultado era válido para 3 factores, a partir do facto de ele ser válido para 2 factores).□

II.5.8. Um caso particular importante da fórmula anterior é aquele em que todos os p_j são 1. Dado portanto, para cada $1 \leq j \leq n$, $\xi_j \in A^1(E; \mathbb{K}')$, obtemos a seguinte fórmula para o tensor alternado $\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n \in A^n(E; \mathbb{K}')$:

$$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n = n! \text{Alt}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n).$$

Com demonstração análoga se verificaria que o produto tensorial simétrico \odot é associativo, começando-se naturalmente por estabelecer o análogo do lema II.5.5: Se $\xi \in L^p(E; \mathbb{K}')$ e $\eta \in L^q(E; \mathbb{K}')$ são tais que, ou $\text{Sym}(\xi) = 0$, ou $\text{Sym}(\eta) = 0$, então $\text{Sym}(\xi \otimes \eta) = 0$. Do mesmo modo, dado, para cada $1 \leq j \leq n$, $\xi_j \in S^{p_j}(E; \mathbb{K}')$, tem-se a fórmula análoga à de II.5.7:

$$\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n = \frac{(p_1 + \cdots + p_n)!}{p_1! \cdots p_n!} \text{Sym}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n).$$

II.5.9. Seja E um espaço vectorial de dimensão m sobre \mathbb{K} , com uma base $(x_j)_{1 \leq j \leq m}$ e seja $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Dado $0 \leq p \leq m$, podemos então considerar a base associada de $A^1(E; \mathbb{K}') = L(E; \mathbb{K}')$, constituída pelos ξ_j , e a base associada de $A^p(E; \mathbb{K}')$, constituída pelos ξ_{j_1, \dots, j_p} , com $j_1 < \cdots < j_p$ em $\{1, \dots, m\}$. Tem-se então

$$\xi_{j_1, \dots, j_p} = \xi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{j_p}.$$

Dem: Uma vez que, como se viu em II.2.12,

$$\xi_{j_1, \dots, j_p} = \xi_{j_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{j_p},$$

o resultado é uma consequência da definição dada em II.4.11 e da fórmula para o produto exterior de tensores alternados de grau 1, apresentada em II.5.8.□

O resultado que se segue é mais um exemplo das relações dos determinantes com os espaços de aplicações multilineares alternadas. Nele se dá mais uma caracterização do produto exterior de n tensores alternados de grau 1.

II.5.10. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e, para cada $1 \leq j \leq n$, $\xi_j \in A^1(E; \mathbb{K}') = L(E; \mathbb{K}')$. Dados $x_1, \dots, x_n \in E$, tem-se então

$$(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n)(x_1, \dots, x_n) = \det((\xi_j(x_k))).$$

Dem: Tendo em conta a fórmula para o produto exterior, apresentada em II.5.8, e a definição da aplicação Alt , obtemos

$$\begin{aligned}
(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n)(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma} \text{sg}(\sigma) \widehat{\sigma}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n)(x_1, \dots, x_n) = \\
&= \sum_{\sigma} \text{sg}(\sigma) (\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n)(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \\
&= \sum_{\sigma} \text{sg}(\sigma) \xi_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \xi_n(x_{\sigma(n)}) = \det((\xi_j(x_k))). \square
\end{aligned}$$

Vamos agora estabelecer uma fórmula alternativa para o produto exterior de dois tensores alternados de graus p e q , em cuja demonstração será claro qual a utilidade do factor $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ na definição do produto exterior. Começamos, como é habitual, por apresentar um lema:

II.5.11. (Lema) Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$, e consideremos $\xi \in L^{p+q}(E; F)$, que seja alternado, tanto nas primeiras p variáveis, como nas últimas q variáveis, isto é, tal que se verifiquem as duas condições seguintes:

a) Dados $x_{p+1}, \dots, x_{p+q} \in E$, é alternada a aplicação multilinear de E^p em F , definida por

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto \xi(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q});$$

b) Dados $x_1, \dots, x_p \in E$, é alternada a aplicação multilinear de E^q em F , definida por

$$(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) \mapsto \xi(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q});$$

(reparar que ξ não será, em geral, alternada). Para cada sucessão estritamente crescente $j_1 < \cdots < j_p$ de elementos do conjunto $\{1, \dots, p+q\}$, notemos $\dot{j}_{p+1} < \cdots < \dot{j}_{p+q}$ a sucessão estritamente crescente dos restantes elementos daquele conjunto. Tem-se então

$$\begin{aligned}
\text{Alt}(\xi)(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) &= \\
&= \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}, x_{\dot{j}_{p+1}}, \dots, x_{\dot{j}_{p+q}}).
\end{aligned}$$

Dem: Dado $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$, notemos σ' a permutação em \mathfrak{S}_{p+q} , que aplica $\{1, \dots, p\}$ em $\{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}$, de modo crescente, e aplica, também de modo crescente $\{p+1, \dots, p+q\}$ em $\{\sigma(p+1), \dots, \sigma(p+q)\}$. Tem-se então, utilizando o facto de ξ ser alternado, tanto nas primeiras p variáveis como nas q últimas,

$$\begin{aligned} & \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) = \\ & = \text{sg}(\sigma/\{1, \dots, p\}) \text{sg}(\sigma/\{p+1, \dots, p+q\}) \xi(x_{\sigma'(1)}, \dots, x_{\sigma'(p)}, x_{\sigma'(p+1)}, \dots, x_{\sigma'(p+q)}) \end{aligned}$$

(pensar em notar $y_j = x_{\sigma'(j)}$ e $z_k = x_{\sigma'(p+k)}$...), pelo que, tendo em conta II.3.10,

$$\text{sg}(\sigma) \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) = \text{sg}(\{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\}) \xi(x_{\sigma'(1)}, \dots, x_{\sigma'(p+q)}).$$

Se atendermos agora a que, para cada sucessão estritamente crescente $j_1 < \dots < j_p$ em $\{1, \dots, p+q\}$, há exactamente $p!q!$ permutações σ , tais que $\{\sigma(1), \dots, \sigma(p)\} = \{j_1, \dots, j_p\}$, concluimos que

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\xi)(x_1, \dots, x_{p+q}) &= \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} \text{sg}(\sigma) \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}) = \\ &= \frac{p!q!}{(p+q)!} \sum_{j_1 < \dots < j_p} \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}, x_{j_{p+1}}, \dots, x_{j_{p+q}}). \square \end{aligned}$$

II.5.12. (Fórmula alternativa para o produto exterior) Sejam $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}')$ e $\eta \in A^q(E; \mathbb{K}')$. Tem-se então, com as notações do lema anterior,

$$\begin{aligned} \xi \wedge \eta(x_1, \dots, x_{p+q}) &= \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \eta(x_{j_{p+1}}, \dots, x_{j_{p+q}}). \end{aligned}$$

Dem: Uma vez que $\xi \otimes \eta \in L^{p+q}(E; \mathbb{K}')$ verifica trivialmente as hipóteses do lema anterior, o resultado é uma consequência imediata deste e da definição do produto exterior. \square

II.5.13. A aplicação da fórmula para o produto exterior, obtida no resultado anterior, é especialmente cómoda nos casos em que p (ou q) é pequeno. Por exemplo, nos casos $p = 1$ e $p = 2$, obtemos, respectivamente

$$\begin{aligned} \xi \wedge \eta(x_1, \dots, x_{q+1}) &= \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} \xi(x_j) \eta(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{q+1}), \\ \xi \wedge \eta(x_1, \dots, x_{q+2}) &= \\ &= \sum_{j < k} (-1)^{j+k-1} \xi(x_j, x_k) \eta(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{q+2}). \end{aligned}$$

O lema II.5.11 e a fórmula obtida em II.5.12 têm versões correspondentes, com as aplicações multilineares simétricas no papel das alternadas.

Assim, se $\xi \in S^p(E; \mathbb{K}')$ e $\eta \in S^q(E; \mathbb{K}')$, ver-se-ia facilmente que

$$\xi \odot \eta(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \eta(x_{j_{p+1}}, \dots, x_{j_{p+q}}).$$

II.5.14. (Compatibilidade com as imagens recíprocas) Sejam E e F espaços vectoriais sobre \mathbb{K} , $\lambda: E \rightarrow F$ uma aplicação linear e $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Dados $\xi \in A^p(F; \mathbb{K}')$ e $\eta \in A^q(F; \mathbb{K}')$, tem-se então

$$\lambda^*(\xi \wedge \eta) = \lambda^*(\xi) \wedge \lambda^*(\eta) \in A^{p+q}(E; \mathbb{K}').$$

Dem: Trata-se de uma consequência trivial de II.2.16 e de II.4.12, tendo em conta a definição do produto exterior. \square

§6. Produto interior.

II.6.1. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e $x \in E$. Para cada $p \geq 1$, tem então lugar uma aplicação linear $\text{int}_x: L^p(E; F) \rightarrow L^{p-1}(E; F)$, chamada *produto interior por x* , definida por

$$\text{int}_x(\xi)(x_1, \dots, x_{p-1}) = \xi(x, x_1, \dots, x_{p-1}).$$

No caso em que $p = 1$, tem-se $L_{p-1}(E; F) = F$, e a aplicação $\text{int}_x: L(E; F) \rightarrow F$ é simplesmente a aplicação definida por $\text{int}_x(\xi) = \xi(x)$. Repare-se que, não só cada int_x é uma aplicação linear, como tem lugar uma aplicação bilinear, que a (x, ξ) associa $\text{int}_x(\xi)$ (mais precisamente, esta aplicação é \mathbb{K} -linear na primeira variável e \mathbb{K}' -linear na segunda).

Resulta facilmente da definição que a aplicação int_x vai aplicar $A^p(E; F)$ em $A^{p-1}(E; F)$. Vamos necessitar, mais geralmente, de fórmulas que relacionem o produto interior com as aplicações Alt. Para enunciar essas relações, temos necessidade de fixar a seguinte notação:

II.6.2. Dados $p \geq 1$ e $1 \leq j \leq p$, vamos notar $\tau_j \in \mathfrak{S}_p$ a permutação que aplica $1, \dots, p$ sucessivamente em $2, \dots, j, 1, j+1, \dots, p$, por outras palavras, a definida por

$$\tau_j(k) = \begin{cases} k+1 & \text{se } k < j \\ 1 & \text{se } k = j \\ k & \text{se } k > j \end{cases}$$

Repare-se que, contando o número de inversões, constata-se imediatamente que $\text{sg}(\tau_j) = (-1)^{j-1}$.

II.6.3. (**Lema**) Dados $p \geq 1$ e $\xi \in L^p(E; F)$, tem-se, para cada $x \in E$,

$$\text{int}_x(\text{Alt}(\xi)) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \text{Alt}(\text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi))).$$

Dem: Escrevendo, por conveniência de notações, $x = x_1$, vem

$$\begin{aligned} p! \text{int}_x(\text{Alt}(\xi))(x_2, \dots, x_p) &= p! \text{Alt}(\xi)(x_1, \dots, x_p) = \\ &= \sum_{\sigma} \text{sg}(\sigma) \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}). \end{aligned}$$

O somatório anterior é igual à soma de p somatórios, a saber, os correspondentes, para os diferentes $1 \leq j \leq p$, às permutações σ que verificam $\sigma(j) = 1$. O resultado ficará portanto provado, se virmos que, para cada j , o somatório anterior, quando estendido apenas às permutações σ , que verificam $\sigma(j) = 1$, é igual a $(p-1)! (-1)^{j-1} \text{Alt}(\text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi)))(x_2, \dots, x_p)$. Fixemos portanto um tal j . Reparemos que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das permutações $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, que verificam $\sigma(j) = 1$, e o conjunto \mathfrak{S}_{p-1} , correspondência que a cada σ associa a permutação $\sigma': \{1, \dots, p-1\} \rightarrow \{1, \dots, p-1\}$, definida por

$$\sigma'(k) = \begin{cases} \sigma(k) - 1 & \text{se } k < j \\ \sigma(k-1) - 1 & \text{se } k \geq j \end{cases}.$$

Além disso, contando o número de inversões, constata-se imediatamente que $\text{sg}(\sigma) = (-1)^{j-1} \text{sg}(\sigma')$. Se notarmos $y_k = x_{\sigma(k)}$ e $z_k = x_{k+1}$, e se repararmos que $\xi = (\tau_j^{-1})^{\wedge}(\widehat{\tau}_j(\xi))$, vemos que, se $\sigma(j) = 1$,

$$\begin{aligned} \text{sg}(\sigma) \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) &= \text{sg}(\sigma) \xi(y_1, \dots, y_p) = \\ &= \text{sg}(\sigma) \widehat{\tau}_j(\xi)(y_j, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_p) = \\ &= \text{sg}(\sigma) \widehat{\tau}_j(\xi)(x_1, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(j-1)}, x_{\sigma(j+1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \\ &= \text{sg}(\sigma) \text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi))(z_{\sigma'(1)}, \dots, z_{\sigma'(p-1)}), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma(j)=1} \text{sg}(\sigma) \xi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) &= \\ &= (-1)^{j-1} \sum_{\sigma'} \text{sg}(\sigma') \text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi))(z_{\sigma'(1)}, \dots, z_{\sigma'(p-1)}) = \\ &= (-1)^{j-1} (p-1)! \text{Alt}(\text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi)))(z_1, \dots, z_{p-1}) = \\ &= (-1)^{j-1} (p-1)! \text{Alt}(\text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi)))(x_2, \dots, x_p), \end{aligned}$$

como queríamos. \square

II.6.4. Em particular, se $\xi \in A^p(E; F)$, com $p \geq 1$, e se $x \in E$, tem-se $\text{int}_x(\xi) \in A^{p-1}(E; F)$.

Dem: Embora este resultado tenha uma demonstração directa trivial, ele é também uma consequência do resultado anterior, visto que, uma vez que ξ é alternado, tem-se $\text{Alt}(\xi) = \xi$ e $\widehat{\tau}_j(\xi) = (-1)^{j-1} \xi$. \square

II.6.5. **(Lema)** Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Dados $\xi \in L^p(E; \mathbb{K}')$, $\eta \in L^q(E; \mathbb{K}')$ e $x \in E$, tem-se então:

a) Se $1 \leq j \leq p$,

$$\text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi \otimes \eta)) = \text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi)) \otimes \eta;$$

b) Se $p+1 \leq j \leq p+q$,

$$\text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi \otimes \eta)) = \xi \otimes \text{int}_x(\widehat{\tau}_{j-p}(\eta)).$$

Dem: Demonstramos apenas a alínea b), visto que a demonstração de a) é do mesmo tipo (e até um pouco mais simples). Escrevendo $x = x_1$, vem, para cada j entre $p+1$ e $p+q$,

$$\begin{aligned} \text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi \otimes \eta))(x_2, \dots, x_{p+q}) &= \widehat{\tau}_j(\xi \otimes \eta)(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \xi \otimes \eta(x_2, \dots, x_j, x_1, x_{j+1}, \dots, x_{p+q}) = \\ &= \xi(x_2, \dots, x_{p+1}) \eta(x_{p+2}, \dots, x_j, x_1, x_{j+1}, \dots, x_{p+q}) = \\ &= \xi(x_2, \dots, x_{p+1}) \widehat{\tau}_{j-p}(\eta)(x_1, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}) = \\ &= \xi(x_2, \dots, x_{p+1}) \text{int}_x(\widehat{\tau}_{j-p}(\eta))(x_{p+2}, \dots, x_{p+q}) = \\ &= \xi \otimes \text{int}_x(\widehat{\tau}_{j-p}(\eta))(x_2, \dots, x_{p+q}) \end{aligned}$$

(na passagem da terceira para a quarta linha, pensar talvez em pôr $y_1 = x_1$ e, para $2 \leq k \leq q$, $y_k = x_{p+k}$...). \square

II.6.6. **(Resultado fundamental)** Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Se $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}')$ e $\eta \in A^q(E; \mathbb{K}')$, com $p, q \geq 1$, então

$$\text{int}_x(\xi \wedge \eta) = \text{int}_x(\xi) \wedge \eta + (-1)^p \xi \wedge \text{int}_x(\eta).$$

Dem: Tendo em conta os resultados anteriores,

$$\begin{aligned}
\text{int}_x(\xi \wedge \eta) &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{int}_x(\text{Alt}(\xi \otimes \eta)) = \\
&= \frac{(p+q-1)!}{p!q!} \sum_{j=1}^{p+q} (-1)^{j-1} \text{Alt}(\text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi \otimes \eta))) = \\
&= \frac{(p+q-1)!}{p!q!} \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \text{Alt}(\text{int}_x(\widehat{\tau}_j(\xi)) \otimes \eta) + \\
&\quad + \frac{(p+q-1)!}{p!q!} \sum_{j=p+1}^{p+q} (-1)^{j-1} \text{Alt}(\xi \otimes \text{int}_x(\widehat{\tau}_{j-p}(\eta))) = \\
&= \frac{(p+q-1)!}{p!q!} \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} (-1)^{j-1} \text{Alt}(\text{int}_x(\xi) \otimes \eta) + \\
&\quad + \frac{(p+q-1)!}{p!q!} \sum_{j=p+1}^{p+q} (-1)^{j-1} (-1)^{j-p-1} \text{Alt}(\xi \otimes \text{int}_x(\eta)) = \\
&= \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!q!} \text{Alt}(\text{int}_x(\xi) \otimes \eta) + (-1)^p \frac{(p+q-1)!}{p!(q-1)!} \text{Alt}(\xi \otimes \text{int}_x(\eta)) = \\
&= \text{int}_x(\xi) \wedge \eta + (-1)^p \xi \wedge \text{int}_x(\eta). \square
\end{aligned}$$

II.6.7. Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Seja $\xi \in A^p(E; F)$, com $p \geq 2$. Dados $x, y \in E$, tem-se então $\text{int}_x(\text{int}_y(\xi)) = -\text{int}_y(\text{int}_x(\xi))$, em particular, vem $\text{int}_x(\text{int}_x(\xi)) = 0$.

Dem: Basta vermos que ambos os membros dão o mesmo resultado, quando aplicados a (w_1, \dots, w_{p-2}) , e isso é uma consequência imediata da caracterização das aplicações multilineares alternadas, apresentada em II.4.3. \square

§7. Orientação de espaços vectoriais reais.

II.7.1. (**Revisão**) Lembremos que, se E é um espaço vectorial real de dimensão n e se x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n são duas bases de E , diz-se que elas estão *positivamente relacionadas* se, considerando a matriz de mudança de base, cujos elementos $a_{k,j}$ estão definidos por $y_j = \sum_k a_{k,j} x_k$, tem-se $\det((a_{k,j})) > 0$; caso contrário, isto é, se se tiver $\det((a_{k,j})) < 0$, dizemos que elas estão *negativamente relacionadas*.⁹

⁹A razão porque só faz sentido apresentar esta noção para os espaços vectoriais reais está em que, no caso dos espaços vectoriais complexos, o determinante da matriz de mudança de base será, em geral, um número complexo, não fazendo portanto sentido pedir que ele

A relação de duas bases serem positivamente relacionadas é uma relação de equivalência, que tem a propriedade especial de podermos garantir que duas bases estão positivamente relacionadas desde que exista uma terceira com a qual nenhuma delas esteja positivamente relacionada.

Chama-se *orientação* de E a uma aplicação α do conjunto das bases de E (indexadas em $\{1, \dots, n\}$) no conjunto $\{-1, 1\}$ com a propriedade de se ter $\alpha(x_1, \dots, x_n) = \alpha(y_1, \dots, y_n)$ se, e só se, as duas bases estiverem positivamente relacionadas. Chama-se *espaço vectorial orientado* a um espaço vectorial real de dimensão finita, no qual se fixou uma orientação e, relativamente a um tal espaço, chamam-se bases *positivas* ou *directas* àquelas cuja imagem é 1 e bases *negativas* ou *retrógradas* àquelas cuja imagem é -1 .

Fixada uma base x_1, \dots, x_n de E e um número $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, existe uma, e uma só, orientação α de E tal que $\alpha(x_1, \dots, x_n) = \varepsilon$; em particular cada espaço vectorial E tem duas, e só duas, orientações, uma simétrica da outra.

II.7.2. Seja E um espaço vectorial real de dimensão n e seja ξ um elemento não nulo do espaço vectorial real $A^n(E; \mathbb{R})$, de dimensão 1. Tem-se então:

a) Se x_1, \dots, x_n é um sistema de vectores de E , então este sistema é uma base se, e só se, $\xi(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

b) Duas bases x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n de E estão positivamente relacionadas se, e só se, os números reais não nulos $\xi(x_1, \dots, x_n)$ e $\xi(y_1, \dots, y_n)$ têm o mesmo sinal.

Dem: Se o sistema x_1, \dots, x_n não é uma base, ele é linearmente dependente pelo que, como vimos em II.4.7, $\xi(x_1, \dots, x_n) = 0$. Se o sistema for uma base, podemos considerar a base associada de $A^n(E; \mathbb{R})$, formada por um único elemento $\xi_{\wedge 1, \dots, n}$, para o qual se tem $\xi_{\wedge 1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) = 1$. Uma vez que $A^n(E; \mathbb{R})$ tem dimensão 1, vem $\xi = a \xi_{\wedge 1, \dots, n}$, com $a \neq 0$, bastando agora reparar que se tem $\xi(x_1, \dots, x_n) = a \neq 0$. A alínea b) é uma consequência imediata de II.4.15. \square

II.7.3. (**Corolário**) Nas condições anteriores, dada uma base x_1, \dots, x_n de E , esta base está negativamente relacionada com as bases que se obtêm trocando a posição de dois dos vectores ou multiplicando um dos vectores por um número real negativo.

Em geral, se E é um espaço vectorial real de dimensão n , não existe sobre E uma orientação que seja melhor que a outra, pelo que orientar um espaço resultará normalmente de uma escolha mais ou menos arbitrária. Uma excepção é a dos espaços vectoriais de dimensão 0:

seja positivo ou negativo. Repare-se também que, nesta definição, é importante a ordem pela qual consideramos os elementos da base, ordem que está implícita ao considerarmos as bases indexadas em $\{1, \dots, n\}$. Não faz sentido falar de bases positiva ou negativamente relacionadas, quando estas estiverem indexadas em conjuntos arbitrários.

II.7.4. Se E é um espaço vectorial de dimensão 0, E admite uma única base, a saber, a família vazia de vectores. Chamamos *orientação positiva* de E à orientação relativamente à qual essa base é directa e damos à outra orientação o nome de *orientação negativa*.

II.7.5. Chama-se *orientação canónica* de \mathbb{R}^n a orientação relativamente à qual a base canónica e_1, \dots, e_n é directa. Quando não referimos explicitamente qual a orientação que consideramos em \mathbb{R}^n , é esta a que está implícita.

II.7.6. Se E é um espaço vectorial real de dimensão 1, uma base de E é a mesma coisa que um vector não nulo, e dadas duas bases x e y , tem-se $x = ay$, para um certo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e então que elas são positivamente relacionadas se, e só se, $a > 0$. Dar uma orientação de E é portanto dar uma aplicação $\text{sg}: E \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$, tal que, sendo $x = ay$, se tenha $\text{sg}(x) = \text{sg}(y)$ se, e só se, $a > 0$. Aos vectores não nulos cuja imagem é 1 costuma-se dar o nome de *vectores positivos* e àqueles cuja imagem é -1 o de *vectores negativos* (é claro que não havia inconveniente em chamá-los respectivamente de *vectores directos* e *vectores retrógrados*).

II.7.7. Por exemplo, para \mathbb{R} , com a sua orientação canónica, os elementos $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ positivos (resp. negativos) são aqueles que são maiores que 0 (resp. menores que 0), o que mostra que a nomenclatura utilizada não conduz a confusões.¹⁰ É esta a orientação que se considera em \mathbb{R} , salvo aviso em contrário. A aplicação $\text{sg}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$ é portanto a aplicação sinal usual, definida por $\text{sg}(x) = 1$, se $x > 0$, e $\text{sg}(x) = -1$, se $x < 0$ ou, equivalentemente, por

$$\text{sg}(x) = \frac{x}{|x|}.$$

II.7.8. Lembrando a definição de orientação, vemos que, se α é uma orientação do espaço vectorial real E , de dimensão n , então, dadas duas bases x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n de E , com $y_k = \sum_j a_{j,k} x_j$, tem-se

$$\alpha(y_1, \dots, y_n) = \text{sg}(\det((a_{j,k}))) \alpha(x_1, \dots, x_n),$$

ou, por outras palavras, sendo $\lambda: E \rightarrow E$ o isomorfismo definido por $\lambda(x_j) = y_j$,

$$\alpha(y_1, \dots, y_n) = \text{sg}(\det(\lambda)) \alpha(x_1, \dots, x_n).$$

II.7.9. Seja E um espaço vectorial real de dimensão n , e consideremos o correspondente espaço vectorial de dimensão 1, $A^n(E; \mathbb{R})$. Para cada orientação de E existe então uma, e uma só, orientação de $A^n(E; \mathbb{R})$, dita *orientação asso-*

¹⁰No entanto, também se pode considerar em \mathbb{R} a outra orientação, e aí os números positivos são os que são menores que 0 e os negativos os que são maiores que 0.

ciada, tal que, quaisquer que sejam a base x_1, \dots, x_n de E e o elemento não nulo ξ de $A^n(E; \mathbb{R})$, se tenha

$$\text{sg}(\xi(x_1, \dots, x_n)) = \text{sg}(\xi) \alpha(x_1, \dots, x_n).$$

Além disso, se trocarmos a orientação de E , a orientação associada de $A^n(E; \mathbb{R})$ vem também trocada. Fica assim estabelecida uma bijecção entre o conjunto das orientações de E e o das orientações de $A^n(E; \mathbb{R})$.

Dem: Fixemos uma base y_1, \dots, y_n de E e um elemento não nulo η de $A^n(E; \mathbb{R})$. Sabemos que existe então sobre $A^n(E; \mathbb{R})$ uma, e uma só, orientação, que no elemento particular η tome o valor $\text{sg}(\eta) \in \{-1, 1\}$ que verifica

$$\text{sg}(\eta(y_1, \dots, y_n)) = \text{sg}(\eta) \alpha(y_1, \dots, y_n).$$

É imediato que, para cada elemento não nulo ξ de $A^n(E; \mathbb{R})$, tem-se ainda

$$\text{sg}(\xi(y_1, \dots, y_n)) = \text{sg}(\xi) \alpha(y_1, \dots, y_n).$$

O facto de, para uma base arbitrária x_1, \dots, x_n de E se verificar ainda

$$\text{sg}(\xi(x_1, \dots, x_n)) = \text{sg}(\xi) \alpha(x_1, \dots, x_n)$$

é agora uma consequência de II.7.2. Ficou portanto estabelecida a existência de uma orientação em $A^n(E; \mathbb{R})$, verificando a propriedade do enunciado, e a unicidade desta orientação é imediata, assim como o facto de ela vir trocada quando se troca a orientação de E . \square

II.7.10. (**Corolário**) Em particular, dada uma base x_1, \dots, x_n de E , tem-se, para a base associada $\xi_{\wedge 1, \dots, n}$ de $A^n(E; \mathbb{R})$,

$$\text{sg}(\xi_{\wedge 1, \dots, n}) = \alpha(x_1, \dots, x_n).$$

Dem: Basta atender a que $\xi_{\wedge 1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) = 1$. \square

II.7.11. No caso em que E é um espaço vectorial de dimensão 0, tem-se $A^0(E; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e verifica-se imediatamente que, à orientação positiva de E (cf. II.7.4) fica associada a orientação canónica de \mathbb{R} .

II.7.12. Considerando em \mathbb{R}^n a orientação canónica, a orientação associada de $A^n(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ é aquela para a qual o elemento $\det \in A^n(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ é positivo.

Dem: Basta atender a que \det é o elemento $\xi_{\wedge 1, \dots, n}$, da base associada à base canónica e_1, \dots, e_n de \mathbb{R}^n . \square

II.7.13. Sejam E e F espaços vectoriais reais de dimensão n , munidos de orientações α e β , e $\lambda: E \rightarrow F$ um isomorfismo. Existe então um, e um só, $\text{sg}(\lambda) \in \{-1, 1\}$ tal que, qualquer que seja a base x_1, \dots, x_n de E , se tenha

$$\beta(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n)) = \text{sg}(\lambda) \alpha(x_1, \dots, x_n).$$

Além disso, se trocarmos a orientação de E ou se trocarmos a orientação de F , $\text{sg}(\lambda)$ vem trocado.

Dem: Fixando uma base y_1, \dots, y_n de E , podemos definir $\text{sg}(\lambda)$ pela condição de ser $\beta(\lambda(y_1), \dots, \lambda(y_n)) = \text{sg}(\lambda) \alpha(y_1, \dots, y_n)$. Para verificarmos a igualdade do enunciado, para uma base arbitrária x_1, \dots, x_n , basta repararmos que, se for $y_j = \sum_k a_{k,j} x_k$, tem-se também $\lambda(y_j) = \sum_k a_{k,j} \lambda(x_k)$.

Ficou portanto provada a existência de $\text{sg}(\lambda)$, nas condições do enunciado. A unicidade, assim como o facto de $\text{sg}(\lambda)$ vir trocado, se trocarmos uma das orientações, de E ou de F , é trivial. \square

II.7.14. Nas condições anteriores, diz-se que $\text{sg}(\lambda)$ é o *signal* do isomorfismo λ , entre os espaços vectoriais reais de dimensão finita e orientados E e F . Se λ é um isomorfismo tal que $\text{sg}(\lambda) = 1$, diz-se que λ é um isomorfismo *positivo*, ou que *conserva as orientações*. Dos outros isomorfismos, diz-se que são *negativos*, ou que *invertem as orientações*.

II.7.15. Sejam E, F e G espaços vectoriais reais orientados de dimensão n e $\lambda: E \rightarrow F$ e $\mu: F \rightarrow G$ dois isomorfismos. Tem-se então:

a) O isomorfismo $\text{Id}_E: E \rightarrow E$ conserva as orientações, isto é, $\text{sg}(\text{Id}_E) = 1$.

b) $\text{sg}(\mu \circ \lambda) = \text{sg}(\mu) \text{sg}(\lambda)$.

c) $\text{sg}(\lambda^{-1}) = \text{sg}(\lambda)$.

Dem: A alínea a) é trivial e a alínea c) é uma consequência de a) e b). Para verificarmos b), basta fixar uma base x_1, \dots, x_n de E e verificar que, notando α, β e γ as orientações de E, F e G , respectivamente,

$$\begin{aligned} \text{sg}(\mu \circ \lambda) \alpha(x_1, \dots, x_n) &= \gamma(\mu(\lambda(x_1)), \dots, \mu(\lambda(x_n))) = \\ &= \text{sg}(\mu) \beta(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n)) = \text{sg}(\mu) \text{sg}(\lambda) \alpha(x_1, \dots, x_n). \square \end{aligned}$$

II.7.16. Se E é um espaço vectorial real orientado de dimensão n e se $\lambda: E \rightarrow E$ é um isomorfismo, então tem-se $\text{sg}(\lambda) = \text{sg}(\det(\lambda))$, em particular $\text{sg}(\lambda)$ não depende da orientação considerada em E .

Dem: Trata-se de uma consequência imediata da caracterização das bases positiva e negativamente relacionadas, apresentada em II.7.2, visto que, dados uma base x_1, \dots, x_n de E e um elemento não nulo $\xi \in A^n(E; \mathbb{R})$, tem-se $\lambda^*(\xi) = \det(\lambda) \xi$, donde

$$\xi(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n)) = \det(\lambda) \xi(x_1, \dots, x_n). \square$$

II.7.17. Sejam E e F espaços vectoriais reais de dimensão n , munidos de orientações α e β , e consideremos nos espaços vectoriais reais de dimensão 1, $A^n(E; \mathbb{R})$ e $A^n(F; \mathbb{R})$ as orientações associadas. Seja $\lambda: E \rightarrow F$ um isomorfismo, e consideremos o isomorfismo associado $\lambda^*: A^n(F; \mathbb{R}) \rightarrow A^n(E; \mathbb{R})$. Tem-se então $\text{sg}(\lambda^*) = \text{sg}(\lambda)$.

Dem: Fixando um elemento não nulo $\xi \in A^n(F; \mathbb{R})$ e uma base x_1, \dots, x_n

de E , podemos escrever

$$\begin{aligned} \operatorname{sg}(\lambda^*) \operatorname{sg}(\xi) \alpha(x_1, \dots, x_n) &= \operatorname{sg}(\lambda^*(\xi)) \alpha(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \beta(\lambda^*(\xi)(x_1, \dots, x_n)) = \beta(\xi(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n))) = \\ &= \operatorname{sg}(\xi) \beta(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n)) = \operatorname{sg}(\xi) \operatorname{sg}(\lambda) \alpha(x_1, \dots, x_n). \square \end{aligned}$$

Vamos agora estudar situações em que, a partir de orientações em certos espaços vectoriais, é possível construir orientações associadas noutros espaços vectoriais. As situações são principalmente duas, e dizem respeito à noção de orientação induzida num subespaço vectorial e à de orientação produto num produto cartesiano de espaços vectoriais reais. Uma maneira de atacar ao mesmo tempo estas duas situações, e de apanhar de passagem outras que têm também algum interesse, é a de estudar o que se passa quando temos uma sucessão exacta curta de espaços vectoriais.

II.7.18. Dados três espaços vectoriais sobre \mathbb{K} , E , F e G , e duas aplicações lineares $\lambda: E \rightarrow F$ e $\mu: F \rightarrow G$, diz-se que $E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G$ é uma *sucessão exacta* se se tem $\lambda(E) = \ker(\mu)$. Mais geralmente, diz-se que uma sucessão do tipo

$$E_1 \xrightarrow{\lambda_1} E_2 \xrightarrow{\lambda_2} E_3 \xrightarrow{\lambda_3} \dots \xrightarrow{\lambda_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{\lambda_{n-1}} E_n$$

é uma *sucessão exacta*, se isso acontecer, para cada $1 \leq i \leq n-2$, à sucessão

$$E_i \xrightarrow{\lambda_i} E_{i+1} \xrightarrow{\lambda_{i+1}} E_{i+2}$$

(é claro que esta definição pode ser apresentada, com adaptações triviais, para sucessões que sejam infinitas à esquerda, à direita, ou de ambos os lados).

II.7.19. Por exemplo, dizer que uma sucessão $\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F$ é exacta é o mesmo que dizer que $\lambda: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear injectiva, dizer que uma sucessão $E \xrightarrow{\lambda} F \rightarrow \{0\}$ é exacta é o mesmo que dizer que $\lambda: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear sobrejectiva e dizer que $\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F \rightarrow \{0\}$ é uma sucessão exacta é o mesmo que dizer que $\lambda: E \rightarrow F$ é um isomorfismo.

Repare-se que, se uma sucessão $E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G$ é exacta, tem-se, em particular, $\mu \circ \lambda = 0$; esta última condição é aliás equivalente ao facto de se ter $\lambda(E) \subset \ker(\mu)$.

II.7.20. Dizer que uma sucessão do tipo

$$\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G \rightarrow \{0\}$$

é uma sucessão exacta equivale a dizer que se verificam as três condições

seguintes:

- a) $\lambda: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear injectiva;
- b) $\mu: F \rightarrow G$ é uma aplicação linear sobrejectiva;
- c) $\lambda(E) = \ker(\mu)$.

Às sucessões exactas deste tipo costuma-se dar o nome de *sucessões exactas curtas*.

II.7.21. Como exemplos típicos de sucessões exactas curtas temos:

a) Se E e F são espaços vectoriais, podemos considerar o produto cartesiano $E \times F$, assim com as projecções canónicas

$$\pi_1: E \times F \rightarrow E, \quad \pi_2: E \times F \rightarrow F,$$

definidas por $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$, e as injecções canónicas

$$\iota_1: E \rightarrow E \times F, \quad \iota_2: F \rightarrow E \times F,$$

definidas por $\iota_1(x) = (x, 0)$ e $\iota_2(y) = (0, y)$. É então imediato verificar-se que têm lugar as sucessões exactas curtas

$$\begin{aligned} \{0\} &\rightarrow E \xrightarrow{\iota_1} E \times F \xrightarrow{\pi_2} F \rightarrow \{0\} \\ \{0\} &\rightarrow F \xrightarrow{\iota_2} E \times F \xrightarrow{\pi_1} E \rightarrow \{0\}. \end{aligned}$$

b) Se o espaço vectorial G , sobre \mathbb{K} , é soma directa dos subespaços vectoriais E e F , e se $\iota_1: E \rightarrow G$ e $\iota_2: F \rightarrow G$ são as inclusões e $\pi_1: G \rightarrow E$ e $\pi_2: G \rightarrow F$ são as projecções associadas à soma directa, têm lugar as sucessões exactas curtas

$$\begin{aligned} \{0\} &\rightarrow E \xrightarrow{\iota_1} G \xrightarrow{\pi_2} F \rightarrow \{0\} \\ \{0\} &\rightarrow F \xrightarrow{\iota_2} G \xrightarrow{\pi_1} E \rightarrow \{0\}. \end{aligned}$$

c) Se $\lambda: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear injectiva, podemos considerar o subespaço vectorial $\lambda(E)$ de F e o espaço vectorial quociente $F/\lambda(E)$ e, notando $\pi: F \rightarrow F/\lambda(E)$ a projecção canónica, vai ter lugar a sucessão exacta curta

$$\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\pi} \frac{F}{\lambda(E)} \rightarrow \{0\}.$$

Em particular, se E é um subespaço vectorial de F , e se notarmos $\iota: E \rightarrow F$ a inclusão, tem lugar uma sucessão exacta curta

$$\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} \frac{F}{E} \rightarrow \{0\}.$$

d) Se $\mu: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear sobrejectiva, e se $\iota: \ker(\mu) \rightarrow E$ é a

inclusão, tem lugar uma sucessão exacta curta

$$\{0\} \rightarrow \ker(\mu) \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} F \rightarrow \{0\}.$$

II.7.22. Consideremos uma sucessão exacta curta de espaços vectoriais sobre \mathbb{K} ,

$$\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G \rightarrow \{0\}$$

assim como uma base $(x_j)_{j \in J}$ de E e uma base $(z_k)_{k \in K}$ de G . Para cada $k \in K$, escolhamos $y_k \in F$ tal que $\mu(y_k) = z_k$. Tem-se então que a família formada pelos y_k e pelos $\lambda(x_j)$ é uma base de F . Em particular, F tem dimensão finita se, e só se, E e G têm dimensões finitas e, nesse caso, tem-se $\dim(F) = \dim(E) + \dim(G)$.

Dem: Para verificarmos a independência linear, suponhamos que se tinha

$$\sum_j a_j \lambda(x_j) + \sum_k b_k y_k = 0.$$

Aplicando μ a ambos os membros, e atendendo a que $\mu \circ \lambda = 0$, obtemos

$$0 = \sum_j a_j \mu(\lambda(x_j)) + \sum_k b_k \mu(y_k) = \sum_k b_k z_k,$$

donde, pela independência linear dos z_k , $b_k = 0$, para cada k ; podemos então reescrever a primeira igualdade na forma $0 = \lambda(\sum a_j x_j)$, donde, por λ ser uma aplicação linear injectiva, $0 = \sum a_j x_j$, e a independência linear dos x_j garante que $a_j = 0$, para cada j . Seja agora $y \in F$ arbitrário. Tem-se $\mu(y) \in G$, pelo que podemos escrever $\mu(y) = \sum b_k z_k = \mu(\sum b_k y_k)$; sai então $\mu(y - \sum b_k y_k) = 0$, pelo que $y - \sum b_k y_k \in \ker(\mu) = \lambda(E)$, isto é, $y - \sum b_k y_k = \lambda(\sum a_j x_j)$, e portanto $y = \sum a_j \lambda(x_j) + \sum b_k y_k$. \square

II.7.23. Consideremos uma sucessão exacta curta de espaços vectoriais reais de dimensão finita

$$\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G \rightarrow \{0\}$$

Diz-se que um sistema de orientações α , de E , β , de F e γ , de G é *compatível com a sucessão exacta* se, qualquer que seja a base x_1, \dots, x_m de E , a base z_1, \dots, z_n de G e os vectores y_1, \dots, y_n de F , tais que $\mu(y_k) = z_k$, se tem, para a base $y_1, \dots, y_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)$ de F (por esta ordem¹¹),

$$\beta(y_1, \dots, y_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)) = \alpha(x_1, \dots, x_m) \gamma(z_1, \dots, z_n).$$

¹¹A ordenação dos elementos desta base não parece talvez a mais natural, mas é a que se revela mais útil nas aplicações.

II.7.24. Consideremos uma sucessão exacta curta de espaços vectoriais reais de dimensão finita

$$\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G \rightarrow \{0\}$$

Dadas orientações em dois destes espaços, existe então uma, e uma só, orientação no terceiro (dita orientação associada às outras duas e à sucessão exacta curta) tal que o sistema das três orientações fique compatível.

Dem: Suponhamos que dois dos espaços estão orientados. Fixemos uma base x_1, \dots, x_m de E , uma base z_1, \dots, z_n de G e vectores y_1, \dots, y_n em F tais que $\mu(y_k) = z_k$. Sabemos que $y_1, \dots, y_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)$ é uma base de F , pelo que podemos fixar uma orientação no terceiro espaço, pela condição de se ter

$$(1) \quad \beta(y_1, \dots, y_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)) = \alpha(x_1, \dots, x_m) \gamma(z_1, \dots, z_n).$$

Para verificarmos que o sistema das três orientações fica compatível com a sucessão exacta (a unicidade da orientação do terceiro espaço nestas condições é então imediata), fixemos um elemento não nulo ξ em $A^{m+n}(F; \mathbb{R})$, e comecemos por mostrar que, se z'_1, \dots, z'_n é outra base de G e se os vectores y'_1, \dots, y'_n em F são escolhidos de modo que $\mu(y'_k) = z'_k$, então tem-se ainda

$$(2) \quad \beta(y'_1, \dots, y'_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)) = \alpha(x_1, \dots, x_m) \gamma(z'_1, \dots, z'_n).$$

Ora, sendo $z'_k = \sum_{\ell} b_{\ell,k} z_{\ell}$, vem $\mu(y'_k - \sum_{\ell} b_{\ell,k} y_{\ell}) = 0$, donde a existência de $x''_k \in E$ tais que

$$y'_k - \sum_{\ell} b_{\ell,k} y_{\ell} = \lambda(x''_k),$$

e o facto de uma aplicação multilinear alternada se anular quando aplicada a um sistema linearmente dependente permite-nos escrever, por $\lambda(E)$ ter dimensão m e portanto qualquer sistema que contenha mais que m elementos deste espaço ser linearmente dependente,

$$\begin{aligned} & \xi(y'_1, \dots, y'_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)) = \\ & = \xi\left(\sum_{\ell} b_{\ell,1} y_{\ell} + \lambda(x''_1), \dots, \sum_{\ell} b_{\ell,n} y_{\ell} + \lambda(x''_n), \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)\right) = \\ & = \xi\left(\sum_{\ell} b_{\ell,1} y_{\ell}, \dots, \sum_{\ell} b_{\ell,n} y_{\ell}, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)\right), \end{aligned}$$

portanto, uma vez que é trivialmente multilinear alternada a aplicação de F^n em \mathbb{R} , que a (y'_1, \dots, y'_n) associa $\xi(y'_1, \dots, y'_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m))$, podemos escrever, tendo em conta II.4.15,

$$\xi(y'_1, \dots, y'_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)) = \det((b_{\ell,k})) \xi(y_1, \dots, y_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)).$$

Uma vez que se tem também

$$\gamma(z'_1, \dots, z'_n) = \det((b_{\ell,k})) \gamma(z_1, \dots, z_n),$$

vemos que (2) vai ser uma consequência de (1) e destas duas últimas fórmulas, tendo em conta II.7.2. Vejamos agora que, sendo x'_1, \dots, x'_m outra base de E , tem-se ainda

$$(3) \quad \beta(y'_1, \dots, y'_n, \lambda(x'_1), \dots, \lambda(x'_m)) = \alpha(x'_1, \dots, x'_m) \gamma(z'_1, \dots, z'_n),$$

o que acabará a demonstração. Para isso, reparamos que, sendo $x'_j = \sum_i a_{i,j} x_i$, sabemos que se tem

$$\alpha(x'_1, \dots, x'_m) = \det((a_{i,j})) \alpha(x_1, \dots, x_m),$$

e, uma vez que $\lambda(x'_j) = \sum_i a_{i,j} \lambda(x_i)$ e que é multilinear alternada a aplicação de E^m em \mathbb{R} , definida por $(x'_1, \dots, x'_m) \mapsto \xi(y'_1, \dots, y'_n, \lambda(x'_1), \dots, \lambda(x'_m))$,

$$\xi(y'_1, \dots, y'_n, \lambda(x'_1), \dots, \lambda(x'_m)) = \det((a_{i,j})) \xi(y'_1, \dots, y'_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)),$$

pelo que (3) vai ser uma consequência de (2) e das duas igualdades anteriores, tendo mais uma vez em conta II.7.2. \square

Vejamos agora alguns exemplos importantes da situação tratada anteriormente.

II.7.25. Sejam E e F espaços vectoriais reais, com dimensões m e n , munidos de orientações α e β respectivamente. Chama-se então *orientação produto* de $E \times F$ à orientação γ associada às orientações de E e de F e à sucessão exacta curta

$$\{0\} \rightarrow F \xrightarrow{\iota_2} E \times F \xrightarrow{\pi_1} E \rightarrow \{0\}.^{12}$$

É claro que esta orientação vem trocada, desde que se troque a orientação de E ou a de F . Examinando as definições, vemos que, se x_1, \dots, x_m é uma base de E e y_1, \dots, y_n é uma base de F , tem-se, para a correspondente base

¹²Mais uma vez, a ordem dos termos nesta sucessão exacta é a inversa daquela que pareceria mais natural, o que se destina a *compensar* o *atropelo* à ordem natural feito na definição II.7.23. Esta segunda inversão permite que a caracterização do sinal das bases naturais do produto cartesiano seja aquela que seria de esperar. É claro que, se tivéssemos usado uma ordem diferente, tanto em II.7.23 como aqui, obteríamos o mesmo resultado de um modo aparentemente mais elegante, mas isso ir-nos-ia criar problemas nas outras aplicações da situação geral descrita em II.7.23.

do produto $E \times F$,

$$\begin{aligned} \gamma((x_1, 0), \dots, (x_m, 0), (0, y_1), \dots, (0, y_n)) &= \\ &= \alpha(x_1, \dots, x_m) \beta(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

II.7.26. Sejam E um espaço vectorial real de dimensão n e $F \subset E$ um hiperplano, isto é, um subespaço vectorial de dimensão $n - 1$. O conjunto diferença $E \setminus F$ vai ser então união disjunta de dois subconjuntos abertos, chamados *semi-espaços* abertos determinados por F , definidos do seguinte modo: O espaço vectorial quociente E/F tem dimensão 1 e, fixando uma orientação neste espaço, os semi-espaços vão ser o conjunto dos vectores de E cuja classe de equivalência é positiva e o daqueles cuja classe de equivalência é negativa (é claro que, se tivéssemos trocado a orientação do quociente, estes dois conjuntos viriam simplesmente trocados entre si). Dito isto, é imediato que dar uma orientação a E/F é equivalente a escolher um dos semi-espaços, como sendo aquele cujos elementos são os vectores cujas classes de equivalência devem ser positivas (costuma-se então dizer que este é o *semi-espaço positivo* associado a essa orientação e que o outro é o *semi-espaço negativo*). A uma orientação de E/F também se costuma dar o nome de *orientação transversa a F* .

II.7.27. Suponhamos que E é um espaço vectorial real de dimensão n e que $\pi: E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação linear não nula. Tem-se então que $F = \ker(\pi)$ é um hiperplano de E e os semi-espaços abertos associados são o conjunto dos $x \in E$ tais que $\pi(x) > 0$ e o conjunto daqueles tais que $\pi(x) < 0$.

Dem: Uma vez que a imagem de uma aplicação linear é um subespaço vectorial, $\pi(E)$, sendo não nulo, tem que ser igual a \mathbb{R} . Concluímos portanto que π é sobrejectiva, pelo que se obtém por passagem ao quociente, um isomorfismo $\bar{\pi}$ de E/F sobre \mathbb{R} , que à classe de equivalência de x associa $\pi(x)$. Basta agora reparar que, escolhendo uma das orientações de E/F , ou o isomorfismo $\bar{\pi}$ aplica o conjunto dos vectores positivos sobre o conjunto dos números positivos e o dos vectores negativos sobre o dos números negativos (se $\bar{\pi}$ for um isomorfismo positivo), ou vice-versa. \square

II.7.28. Seja E um espaço vectorial real orientado de dimensão n , seja $F \subset E$ um hiperplano, e suponhamos fixada uma orientação transversa de F , isto é, uma orientação de E/F , ou, equivalentemente, a escolha de um dos semi-espaços abertos para semi-espaço positivo. Define-se então a *orientação induzida* no hiperplano F como sendo a associada às orientações de E e de E/F e à sucessão exacta curta

$$\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} \frac{E}{F} \rightarrow \{0\},$$

onde ι e π são a inclusão e a projecção canónica sobre o quociente.

Examinando as definições, vemos que, se x for um vector do semi-espaço

aberto positivo (resp. negativo), então uma base x_1, \dots, x_{n-1} de F é directa se, e só se, a base x, x_1, \dots, x_{n-1} de E for directa (resp. retrógrada).

O resultado que se segue descreve a situação em que duas sucessões exactas curtas estão ligadas por um sistema compatível de isomorfismos.

II.7.29. Dadas duas sucessões exactas curtas de espaços vectoriais sobre \mathbb{K}

$$\begin{aligned} \{0\} &\rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G \rightarrow \{0\}, \\ \{0\} &\rightarrow E' \xrightarrow{\lambda'} F' \xrightarrow{\mu'} G' \rightarrow \{0\}, \end{aligned}$$

diz-se que um sistema de aplicações lineares, $\rho: E \rightarrow E'$, $\sigma: F \rightarrow F'$ e $\tau: G \rightarrow G'$ é *compatível* com as sucessões exactas se se tem $\sigma \circ \lambda = \lambda' \circ \rho$ e $\tau \circ \mu = \mu' \circ \sigma$, o que também costuma exprimir-se dizendo que o *diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \rightarrow & E & \xrightarrow{\lambda} & F & \xrightarrow{\mu} & G & \rightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow \rho & & \downarrow \sigma & & \downarrow \tau & & \\ \{0\} & \rightarrow & E' & \xrightarrow{\lambda'} & F' & \xrightarrow{\mu'} & G' & \rightarrow & \{0\} \end{array}$$

é *comutativo*.

II.7.30. Sob as hipóteses de II.7.29, suponhamos que todos os espaços vectoriais são reais, de dimensão finita e munidos de orientações e que estas são compatíveis com cada uma das sucessões exactas. Suponhamos ainda que as aplicações lineares $\rho: E \rightarrow E'$, $\sigma: F \rightarrow F'$ e $\tau: G \rightarrow G'$ são isomorfismos¹³. Tem-se então

$$\text{sg}(\rho) \text{sg}(\sigma) \text{sg}(\tau) = 1.$$

Dem: Notemos $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ as orientações dos espaços vectoriais E, F, G, E', F', G' . Consideremos uma base x_1, \dots, x_m de E e uma base z_1, \dots, z_n de G , e sejam y_1, \dots, y_n vectores de F tais que $\mu(y_k) = z_k$. Temos então uma base $y_1, \dots, y_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)$ de E , para a qual

$$\beta(y_1, \dots, y_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)) = \alpha(x_1, \dots, x_m) \gamma(z_1, \dots, z_n).$$

Definindo então $u_j = \rho(x_j) \in E'$, $w_k = \tau(z_k) \in G'$ e $v_k = \sigma(y_k) \in F'$, tem-se que u_1, \dots, u_m é uma base de E' , w_1, \dots, w_n é uma base de G' e os vectores v_k verificam

$$\mu'(v_k) = \mu'(\sigma(y_k)) = \tau(\mu(y_k)) = \tau(z_k) = w_k,$$

pelo que temos uma base $v_1, \dots, v_n, \lambda'(u_1), \dots, \lambda'(u_m)$ de F' , para a qual

¹³Pode-se provar que, se duas delas o forem, a terceira também o é (cf. o exercício II.27), mas isso não nos vai interessar de momento.

$$\beta'(v_1, \dots, v_n, \lambda'(u_1), \dots, \lambda'(u_m)) = \alpha'(u_1, \dots, u_m) \gamma'(w_1, \dots, w_n).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \alpha'(u_1, \dots, u_m) &= \text{sg}(\rho) \alpha(x_1, \dots, x_m), \\ \gamma'(w_1, \dots, w_n) &= \text{sg}(\tau) \gamma(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

e, uma vez que $\lambda'(u_j) = \lambda'(\rho(x_j)) = \sigma(\lambda(x_j))$,

$$\beta'(v_1, \dots, v_n, \lambda'(u_1), \dots, \lambda'(u_m)) = \text{sg}(\sigma) \beta(y_1, \dots, y_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)),$$

pelo que o resultado é uma consequência de multiplicar termo a termo estas três últimas fórmulas, tendo em conta as obtidas anteriormente. \square

§8. Elemento de volume e operadores $*$.

II.8.1. Se E é um espaço euclidiano orientado de dimensão 1, existe em E um, e um só, vector x , verificando $\|x\| = 1$ e constituindo uma base directa¹⁴. Dizemos então que x é o *vector unitário positivo* de E .

Dem: Se y for um vector não nulo de E , o vector $x = y/\|y\|$ verifica a condição $\|x\| = 1$. Para cada $z \in E$, tem-se $z = ax$, e então $\|z\| = |a|\|x\| = |a|$, pelo que o únicos vectores de E de norma 1 são x e $-x$ e, destes dois, há um, e um só, que constitui uma base directa. \square

II.8.2. Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão n . Existe então um, e um só elemento $Vol_E \in A^n(E; \mathbb{R})$, a que se dá o nome de *elemento de volume* de E , tal que, para cada base ortonormada x_1, \dots, x_n de E , com o correspondente elemento $\xi_{\wedge 1, \dots, n}$ da base de $A^n(E; \mathbb{R})$, se tenha

$$Vol_E = \begin{cases} \xi_{\wedge 1, \dots, n}, & \text{se a base é directa} \\ -\xi_{\wedge 1, \dots, n}, & \text{se a base é retrógrada.} \end{cases}$$

Tem-se então que Vol_E é um elemento positivo do espaço vectorial $A^n(E; \mathbb{R})$, de dimensão 1, relativamente à orientação associada deste espaço.

Dem: A unicidade é uma consequência trivial de E admitir pelo menos uma base ortonormada. Para demonstrarmos a existência, fixamos uma base ortonormada y_1, \dots, y_n , com a correspondente base de $A^n(E; \mathbb{R})$, constituída pelo único elemento $\eta_{\wedge 1, \dots, n}$, e definimos

$$Vol_E = \begin{cases} \eta_{\wedge 1, \dots, n}, & \text{se a base é directa} \\ -\eta_{\wedge 1, \dots, n}, & \text{se a base é retrógrada,} \end{cases}$$

e ficamos então reduzidos a provar que a condição do enunciado se verifica

¹⁴Por outras palavras, existe uma única base ortonormada directa.

para qualquer base ortonormada x_1, \dots, x_n , com o correspondente elemento $\xi_{\wedge 1, \dots, n}$ da base de $A^n(E; \mathbb{R})$. Ora, isso é uma consequência de II.4.17 visto que, sendo $y_j = \sum_k a_{k,j} x_k$, o facto de termos duas bases ortonormadas implica que a matriz dos $a_{k,j}$ é uma matriz ortogonal, tendo portanto determinante igual a ± 1 . O facto de Vol_E ser um elemento positivo de $A^n(E; \mathbb{R})$, relativamente à orientação associada, é uma consequência imediata de II.7.10. \square

II.8.3. Seja E um espaço euclidiano de dimensão n , munido de uma orientação α , e seja x_1, \dots, x_n uma base ortonormada de E . Para cada $\xi \in A^n(E; \mathbb{K})$, tem-se então

$$\xi = \alpha(x_1, \dots, x_n) \xi(x_1, \dots, x_n) Vol_E.$$

Dem: Trata-se de uma mera reformulação de II.4.11. \square

II.8.4. No caso em que o espaço euclidiano orientado E tem dimensão 0, o elemento de volume $Vol_E \in A^0(E; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ vai ser 1 ou -1 , conforme a orientação de E seja a positiva ou a negativa.

Dem: Basta atender a que $1 \in \mathbb{R} = A^0(E; \mathbb{R})$ é trivialmente a base associada à única base de E (o sistema vazio de vectores). \square

Lembremos que, se E é um espaço euclidiano de dimensão n , então tem lugar um isomorfismo $\theta: E \rightarrow L(E; \mathbb{R})$ (o *isomorfismo canónico*), definido por

$$\theta(x)(y) = \langle y, x \rangle.$$

II.8.5. Seja E um espaço euclidiano e seja x_1, \dots, x_n uma base ortonormada de E . Tem-se então que os elementos da base associada de $L(E; \mathbb{R}) = A^1(E; \mathbb{R})$ são $\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)$. Em particular, no caso em que E é orientado e de dimensão 1 e x é o vector unitário positivo de E , o elemento de volume Vol_E é igual a $\theta(x)$.

Dem: Basta atender a que $\theta(x_j)(x_k) = \langle x_k, x_j \rangle = \delta_{j,k}$. \square

II.8.6. Considerando em \mathbb{R}^n as suas estrutura euclidiana e orientação canónicas, o elemento de volume de \mathbb{R}^n não é mais do que o elemento $\det \in A^n(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ (cf. II.4.16).

II.8.7. Sejam E e F espaços euclidianos orientados de dimensão n , e seja $\lambda: E \rightarrow F$ um isomorfismo, com coeficiente de dilatação c_λ . Tem-se então

$$\lambda^*(Vol_F) = \text{sg}(\lambda) c_\lambda Vol_E.$$

Dem: Fixemos bases ortonormadas x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n para E e F , respectivamente. Podemos então escrever $\lambda(x_j) = \sum_k a_{k,j} y_k$ e então, tendo

em conta I.1.14, $c_\lambda = |\det((a_{k,j}))|$. Vem agora, tendo em conta II.4.11 e II.4.15,

$$\begin{aligned}\lambda^*(Vol_F) &= \pm \lambda^*(Vol_F)(x_1, \dots, x_n) Vol_E = \\ &= \pm Vol_F(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_n)) Vol_E = \\ &= \pm \det((a_{k,j})) Vol_F(y_1, \dots, y_n) Vol_E = \\ &= \pm c_\lambda Vol_E = \pm \text{sg}(\lambda) c_\lambda Vol_E,\end{aligned}$$

bastando atender por fim a que, tendo em conta II.7.17, ambos os membros da igualdade do enunciado são elementos positivos de $A^n(E; \mathbb{R})$, se λ conservar as orientações, e elementos negativos deste espaço, se λ inverter as orientações. \square

II.8.8. O resultado precedente permite apresentar uma justificação para a denominação “elemento de volume” dada à aplicação multilinear alternada $Vol_E: E^n \rightarrow \mathbb{R}$, quando E é um espaço euclidiano munido de uma orientação α . Com efeito, dada uma base arbitrária x_1, \dots, x_n de E , podemos definir o paralelepípedo associado a esta base como sendo o conjunto P dos elementos $x \in E$ que se podem escrever na forma $\sum_j t_j x_j$, com $t_j \in [0, 1]$, e então, sendo μ_E a medida de Lebesgue nos borelianos de E , Vol_E aplica (x_1, \dots, x_n) em $\pm \mu_E(P)$, mais precisamente,

$$Vol_E(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1, \dots, x_n) \mu_E(P).$$

Dem: Sendo $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ o isomorfismo definido por $\lambda(e_j) = x_j$, vemos que $P = \lambda([0, 1]^n)$, donde, uma vez que $\mu_n([0, 1]^n) = 1$, $\mu_E(P) = c_\lambda$ e podemos escrever

$$\begin{aligned}Vol_E(x_1, \dots, x_n) &= \lambda^*(Vol_E)(e_1, \dots, e_n) = \\ &= \text{sg}(\lambda) c_\lambda Vol_{\mathbb{R}^n}(e_1, \dots, e_n) = \\ &= \text{sg}(\lambda) c_\lambda = \alpha(x_1, \dots, x_n) \mu_E(P). \square\end{aligned}$$

II.8.9. Sejam E um espaço euclidiano orientado de dimensão n e \mathbb{K} um dos corpos \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Para cada $0 \leq p \leq n$, existe então uma aplicação linear

$$*: A^p(E; \mathbb{K}) \rightarrow A^{n-p}(E; \mathbb{K}),$$

definida por

$$(*\xi)(x_1, \dots, x_{n-p}) Vol_E = \xi \wedge \theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-p}),$$

onde $\theta: E \rightarrow L(E; \mathbb{R}) = A^1(E; \mathbb{R})$ é o isomorfismo associado à estrutura euclidiana de E .

Dem: Dados $\xi \in A^p(E; \mathbb{K})$ e x_1, \dots, x_{n-p} arbitrários em E , vemos que

$$\xi \wedge \theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-p}) \in A^n(E; \mathbb{K}),$$

pelo que, uma vez que este espaço vectorial sobre \mathbb{K} tem dimensão 1 e

admite Vol_E como base, fica bem definido um elemento $(*\xi)(x_1, \dots, x_{n-p}) \in \mathbb{K}$, pela igualdade do enunciado. É imediato que a aplicação $*\xi: E^{n-p} \rightarrow \mathbb{K}$, assim definida, é multilinear e o facto de ela ser alternada é uma consequência da caracterização destas dada na alínea a) de II.4.3 e da anti-simetria do produto exterior de tensores alternados de grau ímpar. A linearidade da aplicação $*: A^p(E; \mathbb{K}) \rightarrow A^{n-p}(E; \mathbb{K})$, que a ξ associa $*\xi$, é imediata. \square

II.8.10. É imediato que, se trocarmos a orientação de um espaço euclidiano orientado E , o seu elemento de volume vem multiplicado por -1 e portanto a aplicação linear $*$ vem também multiplicada por -1 .

II.8.11. (**Lema**) Seja E um espaço euclidiano de dimensão n , munido de uma orientação α . Dados x_1, \dots, x_n em E , tem-se então

$$Vol_E(x_1, \dots, x_n) Vol_E = \theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_n).$$

Dem: Uma vez que ambos os membros da igualdade do enunciado, quando considerados como funções de (x_1, \dots, x_n) , são aplicações multilineares alternadas de E^n em $A^n(E; \mathbb{R})$, resulta de II.4.10 que, para demonstrar essa igualdade, basta mostrar que ela se verifica quando x_1, \dots, x_n for uma base ortonormal de E . Ora, nesse caso, verificámos em II.8.5 que os $\theta(x_j)$ são os elementos ξ_j da base associada de $A^1(E; \mathbb{R})$, pelo que, tendo em conta II.5.9,

$$\theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_n) = \xi_{\wedge 1, \dots, n} = \alpha(x_1, \dots, x_n) Vol_E,$$

que é igual ao primeiro membro da igualdade, uma vez que

$$Vol_E(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1, \dots, x_n) \xi_{\wedge 1, \dots, n}(x_1, \dots, x_n) = \alpha(x_1, \dots, x_n). \square$$

II.8.12. Vejamos o que são as aplicações lineares $*: A^p(E; \mathbb{K}) \rightarrow A^{n-p}(E; \mathbb{K})$ nos casos particulares em que $p = 0$ e $p = n$:

a) Se $\xi \in A^n(E; \mathbb{K})$, tem-se que $*\xi \in A^0(E; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ é a componente de ξ na base Vol_E , isto é, $\xi = (*\xi) Vol_E$. Em particular, $*(Vol_E) = 1$.

b) Se $a \in \mathbb{K} = A^0(E; \mathbb{K})$, tem-se $*a = a Vol_E \in A^n(E; \mathbb{K})$. Em particular, $*1 = Vol_E$.

Dem: A alínea a) não é mais do que um caso particular trivial da definição, podendo ser olhada como uma convenção pelos inimigos do conjunto vazio. Quanto à alínea b), utilizando o lema anterior, obtemos

$$(*a)(x_1, \dots, x_n) Vol_E = a \theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_n) = a Vol_E(x_1, \dots, x_n) Vol_E,$$

donde $(*a)(x_1, \dots, x_n) = a Vol_E(x_1, \dots, x_n)$. \square

O resultado anterior mostra que a aplicação linear $*$, de $A^0(E; \mathbb{K})$ para $A^n(E; \mathbb{K})$, é um isomorfismo, tendo como inverso a aplicação linear $*$ de $A^n(E; \mathbb{K})$ para $A^0(E; \mathbb{K})$. Vamos agora ver que, a menos de sinal, o mesmo vai acontecer com as aplicações lineares $*$ nos espaços $A^p(E; \mathbb{K})$.

II.8.13. Seja E um espaço euclidiano de dimensão n , munido de uma orientação α , e seja x_1, \dots, x_n uma base ortonormada de E . Para cada $0 \leq p \leq n$, tem-se então:

a) A aplicação linear $*$: $A^p(E; \mathbb{K}) \rightarrow A^{n-p}(E; \mathbb{K})$ é um isomorfismo, tendo como isomorfismo inverso o produto de $(-1)^{p(n-p)}$ pela aplicação linear $*$: $A^{n-p}(E; \mathbb{K}) \rightarrow A^p(E; \mathbb{K})$.

b) Notando, para cada $j_1 < \dots < j_p$ em $\{1, \dots, n\}$, $j_{p+1} < \dots < j_n$ os restantes elementos de $\{1, \dots, n\}$, tem-se, para os elementos das bases associadas de $A^p(E; \mathbb{K})$ e $A^{n-p}(E; \mathbb{K})$,

$$*\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p} = \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \alpha(x_1, \dots, x_n) \xi_{\wedge j_{p+1}, \dots, j_n}.$$

Dem: Dados $k_{p+1} < \dots < k_n$ em $\{1, \dots, n\}$, tem-se

$$\begin{aligned} *\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}(x_{k_{p+1}}, \dots, x_{k_n}) \text{Vol}_E &= \xi_{\wedge j_1, \dots, j_p} \wedge \theta(x_{k_{p+1}}) \wedge \dots \wedge \theta(x_{k_n}) = \\ &= \theta(x_{j_1}) \wedge \dots \wedge \theta(x_{j_p}) \wedge \theta(x_{k_{p+1}}) \wedge \dots \wedge \theta(x_{k_n}), \end{aligned}$$

expressão que será nula se $\{j_1, \dots, j_p\}$ e $\{k_{p+1}, \dots, k_n\}$ tiverem algum elemento em comum e que, caso contrário, isto é, quando $k_{p+1} = j_{p+1}, \dots, k_n = j_n$, é igual a

$$\text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_n) = \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \alpha(x_1, \dots, x_n) \text{Vol}_E.$$

Podemos portanto escrever

$$\begin{aligned} *\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p} &= \sum_{k_{p+1} < \dots < k_n} *\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}(x_{k_{p+1}}, \dots, x_{k_n}) \xi_{\wedge k_{p+1}, \dots, k_n} = \\ &= \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \alpha(x_1, \dots, x_n) \xi_{\wedge j_{p+1}, \dots, j_n}, \end{aligned}$$

o que termina a demonstração de b). Reparemos agora que a composta

$$A^p(E; \mathbb{K}) \xrightarrow{*} A^{n-p}(E; \mathbb{K}) \xrightarrow{(-1)^{p(n-p)}*} A^p(E; \mathbb{K})$$

vai aplicar cada elemento $\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}$ da base de $A^p(E; \mathbb{K})$ em

$$(-1)^{p(n-p)} \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \text{sg}(\{j_{p+1}, \dots, j_n\}) \xi_{\wedge j_1, \dots, j_p} = \xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}$$

(cf. II.3.9), pelo que esta composta é igual à aplicação identidade. Do mesmo modo se verifica que a composta

$$A^{n-p}(E; \mathbb{K}) \xrightarrow{(-1)^{p(n-p)}*} A^p(E; \mathbb{K}) \xrightarrow{*} A^{n-p}(E; \mathbb{K})$$

é igual à aplicação identidade, o que termina a demonstração de a). \square

II.8.14. **(Corolário)** Nas hipóteses do resultado anterior, dados $\eta \in A^p(E; \mathbb{K})$ e $j_1 < \dots < j_p$ em $\{1, \dots, n\}$, vem, notando $j_{p+1} < \dots < j_n$ os restantes índices de $\{1, \dots, n\}$,

$$(*\eta)(x_{j_{p+1}}, \dots, x_{j_n}) = \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \alpha(x_1, \dots, x_n) \eta(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}).$$

Dem: Uma vez que

$$\eta = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \eta(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \xi_{\wedge j_1, \dots, j_p},$$

vemos que

$$\begin{aligned} *\eta &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \eta(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) (*\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}) = \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \eta(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \alpha(x_1, \dots, x_n) \xi_{\wedge j_{p+1}, \dots, j_n} \end{aligned}$$

e daqui resulta a fórmula do enunciado, tendo em conta a caracterização das componentes de um elemento de $A^{n-p}(E; \mathbb{K})$ na base associada a x_1, \dots, x_n . \square

II.8.15. Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão n e seja x_1, \dots, x_n uma base ortonormada de E . Dados $\xi, \eta \in A^p(E; \mathbb{K})$, com $0 \leq p \leq n$, tem-se então

$$\xi \wedge (*\eta) = \eta \wedge (*\xi) = \sum_{j_1 < \dots < j_n} \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \eta(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \text{Vol}_E.$$

Dem: Utilizando a fórmula para o produto exterior apresentada em II.5.12, obtemos, tendo em conta o corolário anterior,

$$\begin{aligned} (\xi \wedge *\eta)(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \text{sg}(\{j_1, \dots, j_p\}) \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) (*\eta)(x_{j_{p+1}}, \dots, x_{j_n}) = \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \alpha(x_1, \dots, x_n) \xi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \eta(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \end{aligned}$$

pelo que, para deduzir a fórmula para $\xi \wedge (*\eta)$ no enunciado, basta reparar que

$$\begin{aligned} \xi \wedge (*\eta) &= (\xi \wedge *\eta)(x_1, \dots, x_n) \xi_{\wedge 1, \dots, n} = \\ &= (\xi \wedge *\eta)(x_1, \dots, x_n) \alpha(x_1, \dots, x_n) \text{Vol}_E. \end{aligned}$$

A fórmula para $\eta \wedge (*\xi)$ resulta da anterior por simetria dos papéis de ξ e η . \square

O comportamento das aplicações lineares $*$: $A^p(F; \mathbb{K}) \rightarrow A^{n-p}(F; \mathbb{K})$, relativamente às imagens recíprocas por meio de aplicações lineares $\lambda: E \rightarrow F$, não é muito fácil de descrever em geral. Vamos no entanto verificar que a situação simplifica-se consideravelmente no caso em que $\lambda: E \rightarrow F$ é um isomorfismo ortogonal.

II.8.16. Sejam E e F espaços euclidianos orientados de dimensão n e seja $\lambda: E \rightarrow F$ um isomorfismo ortogonal. Para cada $\xi \in A^p(F; \mathbb{K})$, tem-se então

$$*\lambda^*(\xi) = \text{sg}(\lambda) \lambda^*(\xi) \in A^{n-p}(E; \mathbb{K}).$$

Dem: Uma vez que λ é um isomorfismo ortogonal, tem-se, para o coeficiente de dilatação, $c_\lambda = 1$ pelo que, por II.8.7, $\lambda^*(Vol_F) = \text{sg}(\lambda) Vol_E$. Mais uma vez por λ ser um isomorfismo ortogonal, dado $x \in E$, tem-se, para cada $y \in E$,

$$\theta(x)(y) = \langle y, x \rangle = \langle \lambda(y), \lambda(x) \rangle = \theta(\lambda(x))(\lambda(y)) = \lambda^*(\theta(\lambda(x)))(y),$$

ou seja, $\theta(x) = \lambda^*(\theta(\lambda(x)))$. Podemos agora escrever, quaisquer que sejam $x_1, \dots, x_{n-p} \in E$,

$$\begin{aligned} (*\lambda^*(\xi))(x_1, \dots, x_{n-p}) Vol_E &= \lambda^*(\xi) \wedge \theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-p}) = \\ &= \lambda^*(\xi) \wedge \lambda^*(\theta(\lambda(x_1))) \wedge \dots \wedge \lambda^*(\theta(\lambda(x_{n-p}))) = \\ &= \lambda^*(\xi \wedge \theta(\lambda(x_1)) \wedge \dots \wedge \theta(\lambda(x_{n-p}))) = \\ &= \lambda^*((\xi)(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_{n-p}))) Vol_F = \\ &= (\xi)(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_{n-p})) \lambda^*(Vol_F) = \\ &= \text{sg}(\lambda) (\xi)(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_{n-p})) Vol_E \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (*\lambda^*(\xi))(x_1, \dots, x_{n-p}) &= \text{sg}(\lambda) (\xi)(\lambda(x_1), \dots, \lambda(x_{n-p})) = \\ &= \text{sg}(\lambda) \lambda^*(\xi)(x_1, \dots, x_{n-p}). \square \end{aligned}$$

II.8.17. Sejam E um espaço euclidiano orientado de dimensão n e $x \in E$ um elemento fixado. Tem-se então:

a) Se $\xi \in A^p(E; \mathbb{K})$, com $0 \leq p < n$,

$$*(\xi \wedge \theta(x)) = \text{int}_x(*\xi) \in A^{n-p-1}(E; \mathbb{K}).$$

b) Se $\xi \in A^p(E; \mathbb{K})$, com $0 < p \leq n$,

$$*\text{int}_x(\xi) = (-1)^{n+1} (*\xi) \wedge \theta(x) \in A^{n-p+1}(E; \mathbb{K}).$$

Dem: Quaisquer que sejam $x_1, \dots, x_{n-p-1} \in E$, vem

$$\begin{aligned} (*(\xi \wedge \theta(x)))(x_1, \dots, x_{n-p-1}) Vol_E &= \xi \wedge \theta(x) \wedge \theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-p-1}) = \\ &= (*\xi)(x, x_1, \dots, x_{n-p-1}) Vol_E = \\ &= \text{int}_x(*\xi)(x_1, \dots, x_{n-p-1}) Vol_E, \end{aligned}$$

o que prova a). Quanto a b), podemos aplicar a conclusão a que acabamos de chegar a $*\xi \in A^{n-p}(E; \mathbb{K})$ e concluir que

$$(-1)^{p(n-p)} \text{int}_x(\xi) = \text{int}_x(**\xi) = *((*\xi) \wedge \theta(x)),$$

donde, aplicando $*$ a ambos os membros,

$$(-1)^{p(n-p)} * \text{int}_x(\xi) = (-1)^{(n-p+1)(p-1)} (*\xi) \wedge \theta(x),$$

e o resultado fica demonstrado se repararmos que,

$$(-1)^{(n-p+1)(p-1)-p(n-p)} = (-1)^{n+1}. \square$$

II.8.18. **(Corolário)** Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$.

Tem-se então:

a) Para cada $x \in E$,

$$*\theta(x) = \text{int}_x(\text{Vol}_E),$$

por outras palavras,

$$(*\theta(x))(x_1, \dots, x_{n-1}) = \text{Vol}_E(x, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

b) Para cada $\xi \in A^1(E; \mathbb{K})$ e $x \in E$,

$$\xi \wedge *\theta(x) = \xi(x) \text{Vol}_E.$$

Dem: A alínea a) não é mais do que o caso particular $\xi = 1 \in A^0(E; \mathbb{K})$ da alínea a) do resultado anterior, visto que $*1 = \text{Vol}_E$. Por outro lado, a alínea b) do resultado anterior permite-nos escrever, tendo em conta II.8.15,

$$\begin{aligned} \xi(x) \text{Vol}_E &= \xi(x) (*1) = *\xi(x) = *\text{int}_x(\xi) = (-1)^{n+1} (*\xi) \wedge \theta(x) = \\ &= \theta(x) \wedge (*\xi) = \xi \wedge (*\theta(x)). \square \end{aligned}$$

II.8.19. Um isomorfismo que aparece com suficiente frequência para merecer um nome é o composto dos isomorfismos $\theta: E \rightarrow L(E; \mathbb{R}) = A^1(E; \mathbb{R})$ e $*$: $A^1(E; \mathbb{R}) \rightarrow A^{n-1}(E; \mathbb{R})$, quando E é um espaço euclidiano orientado de dimensão n . Vamos notar

$$\tilde{\theta}: E \rightarrow A^{n-1}(E; \mathbb{R})$$

esse isomorfismo. Recorde-se que, como vimos no resultado anterior, tem-se

$$\tilde{\theta}(x) = \text{int}_x(\text{Vol}_E).$$

Uma primeira situação em que o isomorfismo $\tilde{\theta}$ intervém é na definição do produto externo num espaço euclidiano orientado de dimensão n , generalizando o bem conhecido produto externo de dois vectores de \mathbb{R}^3 (ou, mais geralmente, de um espaço euclidiano orientado de dimensão 3). Repare-se desde já que, enquanto que em \mathbb{R}^3 se define o produto externo de dois vectores, num espaço euclidiano orientado de dimensão n apenas se define o produto externo de $n - 1$ vectores. Em consequência, apenas na dimensão 3 se tem uma operação no sentido estrito da palavra.

II.8.20. Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Dados $n - 1$ vectores $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$, define-se o *produto externo* $x_1 \times \dots \times x_{n-1} \in E$ pela igualdade

$$x_1 \times \dots \times x_{n-1} = \tilde{\theta}^{-1}(\theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1})).$$

II.8.21. Tendo em conta a anti-simetria do produto exterior de tensores alternados de grau 1, assim como a caracterização das aplicações alternadas dada na alínea a) de II.4.3, deduzimos imediatamente que tem lugar uma aplicação multilinear alternada

$$E^{n-1} \rightarrow E, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto x_1 \times \dots \times x_{n-1},$$

em particular, tem-se $x_1 \times \dots \times x_{n-1} = 0$, sempre que estes vectores sejam linearmente dependentes.

O resultado que segue dá uma caracterização alternativa do produto exterior, a qual mostra, em particular, que, no caso de \mathbb{R}^3 , a definição que estamos a usar é equivalente à clássica (lembrar o conceito de produto misto...).

II.8.22. Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Dados $x_1, \dots, x_{n-1} \in E$, tem-se, para cada $y \in E$,

$$\langle y, x_1 \times \dots \times x_{n-1} \rangle = Vol_E(y, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Dem: Tendo em conta o lema II.8.11 e a alínea b) de II.8.18, vem

$$\begin{aligned} \langle y, x_1 \times \dots \times x_{n-1} \rangle Vol_E &= \theta(y)(x_1 \times \dots \times x_{n-1}) Vol_E = \\ &= \theta(y) \wedge *(\theta(x_1 \times \dots \times x_{n-1})) = \\ &= \theta(y) \wedge \theta(x_1) \wedge \dots \wedge \theta(x_{n-1}) = \\ &= Vol_E(y, x_1, \dots, x_{n-1}) Vol_E, \end{aligned}$$

donde o resultado. \square

II.8.23. (**Corolário**) Sejam E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e x_1, \dots, x_{n-1} um sistema linearmente independente de vectores de E . Existe então um, e um só, vector $y \in E$, de norma 1, ortogonal a cada um dos x_j e tal que y, x_1, \dots, x_{n-1} seja uma base directa de E , e tem-se então

$$x_1 \times \dots \times x_{n-1} = a y,$$

onde

$$a = \|x_1 \times \dots \times x_{n-1}\| = Vol_E(y, x_1, \dots, x_{n-1}) > 0.$$

Dem: Dizer que um vector y é ortogonal a cada x_j é equivalente a dizer que y pertence ao complementar ortogonal do subespaço vectorial de dimensão

$n - 1$ gerado pelos x_j , complementar ortogonal esse que é um subespaço vectorial de dimensão 1, tendo portanto dois, e só dois, vectores de norma 1, que são simétricos um do outro; destes é evidente que um, e um só, verifica a condição de y, x_1, \dots, x_{n-1} ser uma base directa de E (ver, por exemplo, II.7.3). Uma vez que

$$\langle x_j, x_1 \times \dots \times x_{n-1} \rangle = Vol_E(x_j, x_1, \dots, x_{n-1}) = 0,$$

concluimos que $x_1 \times \dots \times x_{n-1}$ é ortogonal a cada x_j , e portanto tem-se $x_1 \times \dots \times x_{n-1} = a y$, para um certo $a \in \mathbb{R}$. Uma vez que Vol_E é positivo, obtemos agora

$$a = \langle y, a y \rangle = \langle y, x_1 \times \dots \times x_{n-1} \rangle = Vol_E(y, x_1, \dots, x_{n-1}) > 0$$

e a igualdade $x_1 \times \dots \times x_{n-1} = a y$, com $\|y\| = 1$ implica finalmente que se tem $\|x_1 \times \dots \times x_{n-1}\| = a$. \square

II.8.24. Em particular, no caso em que E é um espaço euclidiano orientado de dimensão 1, podemos falar do produto externo da família vazia de vectores, que não vai ser mais do que o vector unitário positivo de E .

EXERCÍCIOS

Ex II.1 Sejam E e F espaços vectoriais complexos, e notemos \overline{E} o espaço vectorial complexo, conjugado de E , isto é, aquele que coincide com E como espaço vectorial mas em que a multiplicação de $a \in \mathbb{C}$ por $x \in E$ é igual a $\overline{a}x$, no sentido da multiplicação de E . Reparemos que as aplicações anti-lineares de E para F não são mais do que as aplicações lineares complexas de \overline{E} para F . Mostrar que o espaço vectorial complexo $L_{\mathbb{R}}(E; F)$ é soma directa dos seus subespaços vectoriais complexos $L_{\mathbb{C}}(E; F)$ e $L_{\mathbb{C}}(\overline{E}; F)$ e dizer quais as projecções associadas a esta soma directa.

Ex II.2 Lembrar que, se E é um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , o seu *dual* é o espaço vectorial $L(E; \mathbb{K})$ e o seu *bidual* é o dual deste último, isto é, o espaço vectorial $L(L(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$, tendo lugar uma aplicação linear injectiva

$$\beta: E \rightarrow L(L(E; \mathbb{K}); \mathbb{K}),$$

definida por $\beta(x)(\xi) = \xi(x)$, a qual é um isomorfismo se E tiver dimensão finita (cf. II.2.7).

Mostrar que, se E tem dimensão infinita, então a aplicação linear β não é sobrejectiva. **Sugestão:** Supondo que E tem dimensão infinita, considerar uma base $(x_j)_{j \in J}$ de E . Considerar os $\xi_j \in L(E; \mathbb{K})$ definidos pela condição de se ter $\xi_j(x_j) = 1$ e, para cada $k \neq j$, $\xi_j(x_k) = 0$. Mostrar que os ξ_j são linearmente independentes e, completando-os numa base de $L(E; \mathbb{K})$,

mostrar a existência de $\Phi \in L(L(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$ tal que $\Phi(\xi_j) = 1$, para cada j .
Mostrar que Φ não pode estar na imagem de β .

Ex II.3 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre \mathbb{K} , com duas bases $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ e $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$, e consideremos os escalares $a_{j,k}$ definidos por

$$w_k = \sum_{j=1}^n a_{j,k} x_j$$

(os elementos da matriz de mudança da primeira para a segunda base). Consideremos as bases associadas de $L^p(E; \mathbb{K})$, formadas pelos ξ_{j_1, \dots, j_p} , para a primeira base, e pelos η_{k_1, \dots, k_p} , para a segunda base. Mostrar que, se $\lambda \in L^p(E; \mathbb{K})$, com

$$\lambda = \sum_{j_1, \dots, j_p} b_{j_1, \dots, j_p} \xi_{j_1, \dots, j_p} = \sum_{k_1, \dots, k_p} c_{k_1, \dots, k_p} \eta_{k_1, \dots, k_p},$$

então as componentes de λ nas duas bases associadas estão relacionadas por

$$c_{k_1, \dots, k_p} = \sum_{j_1, \dots, j_p} a_{j_1, k_1} \cdots a_{j_p, k_p} b_{j_1, \dots, j_p}$$

(**Nota:** Por este motivo, os elementos de $L^p(E; \mathbb{K})$ costumam ser chamados *tensores p vezes covariantes*). Mostrar que, em consequência,

$$\xi_{j_1, \dots, j_p} = \sum_{k_1, \dots, k_p} a_{j_1, k_1} \cdots a_{j_p, k_p} \eta_{k_1, \dots, k_p}.$$

Ex II.4 Seja E um espaço vectorial de dimensão n sobre \mathbb{K} , com uma base $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$, e consideremos as bases associadas em $L^p(E; \mathbb{K})$, $L^q(E; \mathbb{K})$ e $L^{p+q}(E; \mathbb{K})$. Dados $\xi \in L^p(E; \mathbb{K})$ e $\eta \in L^q(E; \mathbb{K})$, exprimir as componentes de $\xi \otimes \eta \in L^{p+q}(E; \mathbb{K})$ a partir das componentes de ξ e de η .

Ex II.5 Seja J um conjunto com n elementos, não munido a priori de nenhuma ordem total. Mostrar que, para cada bijecção $\sigma: J \rightarrow J$, pode-se definir o sinal $\text{sg}(\sigma)$ de σ , como sendo o sinal de σ quando se considera em J uma ordem total arbitrária. Mostrar que a noção de sinal assim definida verifica ainda as propriedades enunciadas no teorema de Bézout. Por que razão não é possível fazer o mesmo para bijecções entre dois conjuntos distintos com n elementos, não munidos a priori de ordens totais?

Ex II.6 Sejam E e F espaços vectoriais e $\xi: E^p \rightarrow F$ uma aplicação multilinear, tal que se tenha $\xi(x_1, \dots, x_p) = 0$, sempre que exista $i < p$ tal que $x_i = x_{i+1}$. Mostrar que ξ é uma aplicação multilinear alternada. **Sugestão:** Utilizar a condição a) de II.4.3, partindo do facto que, para cada sistema arbitrário de

vectores x_1, \dots, x_p ,

$$0 = \xi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_p).$$

Ex II.7 Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e F um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Mostrar que tem então lugar uma soma directa

$$L^2(E; F) = S^2(E; F) \oplus A^2(E; F)$$

e dizer quais as projecções associadas a esta soma directa.

Ex II.8 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre \mathbb{K} e x_1, \dots, x_p um sistema de p vectores de E . Mostre que este sistema é linearmente independente se, e só se, existe $\xi \in A^p(E; \mathbb{K})$ tal que $\xi(x_1, \dots, x_p) \neq 0$.

Ex II.9 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo \mathbb{K} e $\lambda: E \rightarrow E$ uma aplicação linear. Mostrar que λ é um isomorfismo se, e só se, $\det(\lambda) \neq 0$.

Ex II.10 a) Verificar que o resultado II.4.22 pode servir para demonstrar o facto de o determinante do produto de duas matrizes do tipo $n \times n$ ser igual ao produto dos determinantes destas.

b) Mostrar que o resultado II.4.23 permite demonstrar que, dadas duas matrizes A , do tipo $p \times p$, e B , do tipo $q \times q$, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

é igual a $\det(A) \times \det(B)$.

Ex II.11 (**Generalização de II.4.23**) Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita sobre \mathbb{K} e F e G dois subespaços vectoriais de E , tais que tenha lugar a soma directa $E = F \oplus G$. Seja $\lambda: E \rightarrow E$ uma aplicação linear, tal que $\lambda(F) \subset F$, mas não obrigatoriamente $\lambda(G) \subset G$. Sendo $\pi_G: E \rightarrow G$ a segunda projecção associada à soma directa, mostrar que se tem

$$\det(\lambda) = \det(\lambda|_F) \times \det(\pi_G \circ \lambda|_G)$$

e utilizar este facto para deduzir o seguinte resultado sobre determinantes de matrizes: Dadas as matrizes A , de tipo $p \times p$, B , de tipo $q \times q$, e C , de tipo $p \times q$, o determinante da matriz, de tipo $(p+q) \times (p+q)$,

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

é igual ao produto dos determinantes das matrizes A e B . **Sugestão:** Notando $\pi_F: E \rightarrow F$ a primeira projecção associada à soma directa e $\lambda': E \rightarrow E$ a aplicação linear definida por

$$\lambda'(x) = \lambda(\pi_F(x)) + \pi_G(\lambda(\pi_G(x))),$$

verificar que $\det(\lambda) = \det(\lambda')$ e aplicar II.4.23 a λ' .

Ex II.12 Sejam E um espaço vectorial complexo de dimensão n e $\lambda: E \rightarrow E$ uma aplicação linear. Sabemos que também podemos olhar para E como espaço vectorial real de dimensão $2n$ e então $\lambda: E \rightarrow E$ é também uma aplicação linear no sentido real. Notemos $\det_{\mathbb{C}}(\lambda)$ e $\det_{\mathbb{R}}(\lambda)$ o determinante de λ , quando se olha para E como espaço vectorial complexo, e o determinante de λ , quando se olha para E como espaço vectorial real¹⁵. Verificar que se tem

$$\det_{\mathbb{R}}(\lambda) = |\det_{\mathbb{C}}(\lambda)|^2.$$

Sugestão: Fazer a demonstração por indução em n , lembrando que, se $n \geq 1$, λ admite um valor próprio complexo e aplicando em seguida o exercício anterior.

Ex II.13 a) Lembrar que, se C é uma matriz quadrada, com elementos $c_{j,k}$, define-se o *traço* de C , $\text{tr}(C)$, como sendo o escalar $\sum_j c_{j,j}$. Mostrar que, se A é uma matriz do tipo $m \times n$ e se B é uma matriz do tipo $n \times m$, então

$$\text{tr}(A \times B) = \text{tr}(B \times A).$$

b) Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre \mathbb{K} e $\lambda: E \rightarrow E$ uma aplicação linear. Mostrar que se pode definir um escalar $\text{tr}(\lambda) \in \mathbb{K}$, chamado ainda *traço* da aplicação linear λ , pela condição de se ter, para cada base x_1, \dots, x_n de E , para a qual $\lambda(x_k) = \sum_j c_{j,k} x_j$, $\text{tr}(\lambda) = \sum_j c_{j,j}$.

c) Sejam E e F espaços vectoriais sobre \mathbb{K} , com dimensões m e n , respectivamente, e $\lambda: E \rightarrow F$ e $\mu: F \rightarrow E$ duas aplicações lineares. Mostrar que se tem

$$\text{tr}(\lambda \circ \mu) = \text{tr}(\mu \circ \lambda).$$

d) Sejam E um espaço vectorial complexo e $\lambda: E \rightarrow E$ uma aplicação linear. No mesmo espírito que no exercício II.12, notemos $\text{tr}_{\mathbb{C}}(\lambda) \in \mathbb{C}$ o traço de λ , quando olhamos para E como espaço vectorial complexo, e $\text{tr}_{\mathbb{R}}(\lambda) \in \mathbb{R}$ o traço de λ , quando olhamos para E como espaço vectorial real. Mostrar que se tem

$$\text{tr}_{\mathbb{R}}(\lambda) = 2 \Re(\text{tr}_{\mathbb{C}}(\lambda))$$

(onde notamos $\Re(c)$ a parte real de um complexo c).

¹⁵Tem-se, portanto, $\det_{\mathbb{C}}(\lambda) \in \mathbb{C}$ e $\det_{\mathbb{R}}(\lambda) \in \mathbb{R}$.

Ex II.14 Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita sobre \mathbb{K} e F e G dois subespaços vectoriais tais que tenha lugar a soma directa $E = F \oplus G$ e notemos $\pi_F: E \rightarrow F$ e $\pi_G: E \rightarrow G$ as projecções associadas a esta soma directa. Se $\lambda: E \rightarrow E$ é uma aplicação linear, mostrar que, considerando as aplicações lineares $\pi_F \circ \lambda|_F: F \rightarrow F$ e $\pi_G \circ \lambda|_G: G \rightarrow G$, tem-se

$$\text{tr}(\lambda) = \text{tr}(\pi_F \circ \lambda|_F) + \text{tr}(\pi_G \circ \lambda|_G)$$

(comparar com a conclusão do exercício II.11).

Ex II.15 Sejam E um espaço vectorial de dimensão n sobre o corpo \mathbb{K} e $\lambda: E \rightarrow E$ uma aplicação linear e consideremos a correspondente aplicação linear $\lambda^*: A^n(E; \mathbb{K}) \rightarrow A^n(E; \mathbb{K})$, entre espaços vectoriais de dimensão 1. Mostrar que se tem $\det(\lambda) = \text{tr}(\lambda^*)$.

Ex II.16 a) O “teorema” que enunciamos em seguida é falso. Apresentar um contra-exemplo e descobrir onde é que falha a demonstração que apresentamos.

“Teorema” Sejam E e F espaços vectoriais de dimensões m e n , respectivamente, sobre o corpo \mathbb{K} , e sejam $\lambda: E \rightarrow F$ e $\mu: F \rightarrow E$ duas aplicações lineares. Tem-se então, para as aplicações lineares $\mu \circ \lambda: E \rightarrow E$ e $\lambda \circ \mu: F \rightarrow F$, $\det(\mu \circ \lambda) = \det(\lambda \circ \mu)$.

“Dem”: Tendo em conta o exercício II.15 e a alínea c) do exercício II.13, podemos escrever

$$\begin{aligned} \det(\mu \circ \lambda) &= \text{tr}((\mu \circ \lambda)^*) = \text{tr}(\lambda^* \circ \mu^*) = \\ &= \text{tr}(\mu^* \circ \lambda^*) = \text{tr}((\lambda \circ \mu)^*) = \det(\lambda \circ \mu). \square \end{aligned}$$

b) Verificar que o “teorema” em questão já é válido desde que se faça a exigência de se ter $m = n$.

Ex II.17 Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Mostrar que, para cada $p \geq 0$, tem lugar uma aplicação p -linear alternada, $L(E; \mathbb{K}')^p \rightarrow A^p(E; \mathbb{K}')$, que a cada (ξ_1, \dots, ξ_p) associa $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p$.
Sugestão: Utilizar a caracterização dada na alínea a) de II.4.3.

Ex II.18 Diz-se que um elemento $\xi \in A^p(E; \mathbb{K}')$ é *decomponível* se existirem ξ_1, \dots, ξ_p em $L(E; \mathbb{K}')$ tais que se tenha $\xi = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p$. Seja E um espaço vectorial de dimensão 4, sobre \mathbb{K} , com uma base x_1, x_2, x_3, x_4 , e sejam ξ_j os elementos da base associada de $L(E; \mathbb{K})$. Sendo então ξ o elemento $\xi_1 \wedge \xi_2 + \xi_3 \wedge \xi_4 \in A^2(E; \mathbb{K})$, mostrar que $\xi \wedge \xi \neq 0$ e deduzir daqui que ξ não é decomponível.

Ex II.19 (Alguns resultados auxiliares de Álgebra Linear)

a) Sejam E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} e ξ_1, \dots, ξ_p p elementos de $L(E; \mathbb{K})$. Mostrar que aqueles elementos são linearmente independentes se, e só se, a aplicação linear $\xi: E \rightarrow \mathbb{K}^p$, definida por

$$\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_p(x)),$$

é sobrejectiva. **Sugestão:** Considerar em \mathbb{K}^p o produto interno canónico (real ou complexo) e verificar que aquele sistema é linearmente dependente se, e só se, existe um vector não nulo de \mathbb{K}^p , que seja ortogonal ao subespaço vectorial $\xi(E)$ de \mathbb{K}^p .

b) Mostrar que um sistema de elementos ξ_1, \dots, ξ_p de $L(E; \mathbb{K})$ é linearmente independente se, e só se, existem elementos x_1, \dots, x_p de E , tais que $\xi_j(x_k) = \delta_{j,k}$, e verificar que, nesse caso, os elementos x_1, \dots, x_p têm que ser linearmente independentes.

c) Utilizar a alínea b) para provar que, dados elementos arbitrários $\eta_1, \dots, \eta_p \in L(E; \mathbb{K})$, um elemento $\xi \in L(E; \mathbb{K})$ pertence ao subespaço vectorial gerado pelos η_j se, e só se, $\xi(x) = 0$, para cada x que verifique $\eta_j(x) = 0$, para todo o j .

Sugestão: Mostrar que se pode já supor que os elementos η_1, \dots, η_p são linearmente independentes.

Ex II.20 Seja E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} .

a) Dados $\xi_1, \dots, \xi_p \in L(E; \mathbb{K})$, mostrar que estes elementos são linearmente independentes se, e só se, o elemento $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p \in A^p(E; \mathbb{K})$ é diferente de 0.

Sugestão: Se os elementos forem linearmente independentes, considerar $x_1, \dots, x_p \in E$ tais que $\xi_j(x_k) = \delta_{j,k}$ e calcular $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p(x_1, \dots, x_p)$. Para a recíproca, ter em conta o exercício II.17.

b) Dados dois sistemas linearmente independentes de elementos de $L(E; \mathbb{K})$, ξ_1, \dots, ξ_p e η_1, \dots, η_p , mostrar que estes dois sistemas geram o mesmo subespaço vectorial de $L(E; \mathbb{K})$ se, e só se, existe $a \in \mathbb{K}$, tal que $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p = a \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p$. **Sugestão:** Se eles gerarem o mesmo subespaço, cada ξ_j é combinação linear dos η_k ; se eles não geram o mesmo subespaço, existe η_k que não é combinação linear dos ξ_j e então $\eta_k \wedge (\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p) \neq 0$, mas $\eta_k \wedge (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p) = 0$.

Ex II.21 Seja E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} . Dado $\xi \in A^p(E; \mathbb{K})$, com $p \geq 1$, chama-se *subespaço associado* a ξ o conjunto

$$E' = \{x \in E \mid \forall_{x_2, \dots, x_p} \xi(x, x_2, \dots, x_p) = 0\},$$

conjunto que se verifica trivialmente ser um subespaço vectorial de E .

Mostrar que, se ξ_1, \dots, ξ_p é um sistema linearmente independente de elementos de $L(E; \mathbb{K})$, então o subespaço associado a $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p$ é o conjunto dos vectores $x \in E$ tais que $\xi_j(x) = 0$, para cada $1 \leq j \leq p$.

Sugestão: Considerar vectores $y_1, \dots, y_p \in E$, tais que $\xi_j(y_k) = \delta_{j,k}$. Se $x \in E$ é tal que $\xi_1(x) \neq 0$, utilizar II.5.10 e o exercício II.11 para mostrar que $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p(x, y_2, \dots, y_p) = \xi_1(x) \neq 0$. Se $x \in E$ é tal que $\xi_j(x) = 0$,

para cada j , utilizar II.5.10 para mostrar que, quaisquer que sejam x_2, \dots, x_p ,

$$\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p(x, x_2, \dots, x_p) = 0.$$

Ex II.22 Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão 0, munidos de orientações (cf. II.7.4). Seja $\lambda: E \rightarrow F$ a única aplicação linear, a qual é evidentemente um isomorfismo. Discutir em que casos é que λ conserva ou inverte as orientações.

Ex II.23 Seja e_1, \dots, e_n a base canónica de \mathbb{C}^n , como espaço vectorial complexo. Vamos chamar orientação canónica de \mathbb{C}^n , como espaço vectorial real, aquela para a qual a base $e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_n, ie_n$ é directa.

a) Mostrar que, se $\lambda: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é um isomorfismo de espaços vectoriais complexos, então, quando consideramos λ como isomorfismo para as estruturas reais associadas, λ conserva as orientações. **Sugestão:** Ter em conta II.7.16 e o exercício II.12.

b) Seja E um espaço vectorial complexo de dimensão n . Mostrar que existe sobre E , considerado como espaço vectorial real de dimensão $2n$, uma, e uma só, orientação (a que daremos o nome de *orientação canónica*), tal que, qualquer que seja o isomorfismo complexo $\lambda: \mathbb{C}^n \rightarrow E$, λ conserva as orientações, quando se considera em \mathbb{C}^n a orientação canónica.

c) Mostrar que, se E é um espaço vectorial complexo, com uma base x_1, \dots, x_n , então considerando a orientação canónica de E , como espaço vectorial real, a base $x_1, ix_1, \dots, x_n, ix_n$ é directa.

d) Mostrar que, se E e F são espaços vectoriais complexos de dimensão n , e se $\lambda: E \rightarrow F$ é um isomorfismo complexo, então, considerando E e F como espaços vectoriais reais, com as orientações canónicas, λ conserva as orientações.

e) Alguns autores definem a orientação canónica de \mathbb{C}^n como sendo aquela para a qual a base $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ é directa. Que relação existe entre a orientação definida deste modo e aquela que definimos no início?

Ex II.24 Consideremos uma sucessão exacta curta de espaços vectoriais sobre \mathbb{K}

$$\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G \rightarrow \{0\},$$

com E de dimensão m e G de dimensão n .

a) Mostrar que existe uma aplicação linear $\rho: F \rightarrow E$ tal que $\rho \circ \lambda = Id_E$.

b) Sendo $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$, mostrar que se pode definir uma aplicação bilinear de $A^n(G; \mathbb{K}') \times A^m(E; \mathbb{K}')$ em $A^{m+n}(F; \mathbb{K}')$, que notaremos $(\eta, \xi) \mapsto \eta \times \xi$, por $\eta \times \xi = \mu^*(\eta) \wedge \rho^*(\xi)$, onde $\rho: F \rightarrow E$ é uma aplicação linear arbitrária, verificando $\rho \circ \lambda = Id_E$ (estamos evidentemente a afirmar que este resultado não depende da escolha de ρ).

c) Nas condições de b), mostrar que, se $\eta \neq 0$ e $\xi \neq 0$, então $\eta \times \xi \neq 0$;

d) Sendo x_1, \dots, x_m uma base de E e z_1, \dots, z_n uma base de G , e escolhendo y_1, \dots, y_n em F , tais que $\mu(y_j) = z_j$, mostrar que se tem

$$\eta \times \xi(y_1, \dots, y_n, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_m)) = \eta(z_1, \dots, z_n) \xi(x_1, \dots, x_m).$$

Sugestão: Para demonstrar a independência da escolha de ρ e a conclusão de c), basta demonstrar d). Para esse efeito, utilizar a fórmula para o produto exterior descrita em II.5.12.

Ex II.25 Nas condições do exercício anterior, suponhamos que $\mathbb{K} = \mathbb{K}' = \mathbb{R}$, e que E , F e G estão orientados, com orientações compatíveis com a referida sucessão exacta curta. Considerando as orientações associadas em $A^m(E; \mathbb{R})$, $A^n(G; \mathbb{R})$ e $A^{m+n}(F; \mathbb{R})$, mostrar que, para cada par de elementos não nulos $\xi \in A^m(E; \mathbb{R})$ e $\eta \in A^n(G; \mathbb{R})$, tem-se $\text{sg}(\eta \times \xi) = \text{sg}(\eta) \text{sg}(\xi)$.

Ex II.26 Sejam E , F e G espaços vectoriais complexos e $\lambda: E \rightarrow F$ e $\mu: F \rightarrow G$ aplicações lineares complexas tais que tenha lugar a sucessão exacta curta

$$\{0\} \rightarrow E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G \rightarrow \{0\}.$$

Consideremos sobre E , F e G , olhados como espaços vectoriais reais, as orientações canónicas (cf. a alínea b) do exercício II.23). Mostrar que o sistema das três orientações é então compatível com a sucessão exacta curta.

Ex II.27 a) Consideremos o seguinte diagrama comutativo de espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e de aplicações lineares:

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{\lambda} & F & \xrightarrow{\mu} & G & \rightarrow & \{0\} \\ \downarrow \rho & & \downarrow \sigma & & & & \\ E' & \xrightarrow{\lambda'} & F' & \xrightarrow{\mu'} & G' & \rightarrow & \{0\} \end{array},$$

em que as duas linhas são exactas. Mostrar que existe uma, e uma só, aplicação linear $\tau: G \rightarrow G'$, tal que $\tau \circ \mu = \mu' \circ \sigma$,¹⁶ e que essa aplicação linear é um isomorfismo se isso acontecer a ρ e a σ .

b) Consideremos o seguinte diagrama comutativo de espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e de aplicações lineares:

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \rightarrow & E & \xrightarrow{\lambda} & F & \xrightarrow{\mu} & G \\ & & & & \downarrow \sigma & & \downarrow \tau, \\ \{0\} & \rightarrow & E' & \xrightarrow{\lambda'} & F' & \xrightarrow{\mu'} & G' \end{array}$$

em que as duas linhas são exactas. Mostrar que existe uma, e uma só, aplicação linear $\rho: E \rightarrow E'$ tal que $\sigma \circ \lambda = \lambda' \circ \rho$ e que esta aplicação linear é um isomorfismo se isso acontecer a σ e a τ .

c) Consideremos o seguinte diagrama comutativo de espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e de aplicações lineares:

¹⁶Por outras palavras que permita prolongar o diagrama sem perda da comutatividade deste.

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \rightarrow & E & \xrightarrow{\lambda} & F & \xrightarrow{\mu} & G \rightarrow \{0\} \\ & & \downarrow \rho & & \downarrow \sigma & & \downarrow \tau \\ \{0\} & \rightarrow & E' & \xrightarrow{\lambda'} & F' & \xrightarrow{\mu'} & G' \rightarrow \{0\} \end{array},$$

em que as duas linhas são exactas. Mostrar que, se ρ e τ são isomorfismos, o mesmo vai acontecer a σ . **Nota:** Esta conclusão é um caso particular do chamado “Lema dos Cinco”.¹⁷

Ex II.28 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão n . Dados dois sistemas de n vectores de E , x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n , mostrar que se tem

$$\det(\langle x_j, y_k \rangle) = Vol_E(x_1, \dots, x_n) Vol_E(y_1, \dots, y_n).$$

Sugestão: Aplicando duas vezes o lema II.4.10, mostrar que é suficiente provar o resultado no caso particular em que ambos os sistemas coincidem com uma mesma base ortonormada w_1, \dots, w_n .

Ex II.29 Seja E um espaço euclidiano de dimensão 0, sobre o qual se considera uma das suas orientações (a positiva ou a negativa). Sendo \mathbb{K} igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , o que será o isomorfismo $*$: $\mathbb{K} = A^0(E; \mathbb{K}) \rightarrow A^0(E; \mathbb{K}) = \mathbb{K}$?

Ex II.30 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão 2 e consideremos o correspondente isomorfismo $\theta: E \rightarrow L(E; \mathbb{R}) = A^1(E; \mathbb{R})$.

a) Dado $x \in E \setminus \{0\}$, mostrar que se tem $*\theta(x) = \theta(y)$, onde y é o único vector de E tal que $\langle x, y \rangle = 0$, $\|y\| = \|x\|$ e x, y é uma base directa.

Sugestão: Por linearidade, basta considerar o caso em que $\|x\| = 1$.

b) Dado $x \in E \setminus \{0\}$, mostrar que o produto externo da família formada pelo único vector x é o vector y que verifica as três condições $\langle x, y \rangle = 0$, $\|y\| = \|x\|$ e y, x é uma base directa.

Ex II.31 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão n e sejam x_1, \dots, x_{n-1} e y_1, \dots, y_{n-1} dois sistemas de $n-1$ vectores de E . Mostrar que se tem

$$Vol_E(x_1 \times \dots \times x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}) = \det(\langle x_j, y_k \rangle)$$

e deduzir daqui que

$$\langle x_1 \times \dots \times x_{n-1}, y_1 \times \dots \times y_{n-1} \rangle = \det(\langle x_j, y_k \rangle).$$

Sugestão: Recordar a caracterização do isomorfismo $\tilde{\theta}: E \rightarrow A^{n-1}(E; \mathbb{K})$ referida em II.8.19 e ter em conta II.5.10.

Ex II.32 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão 3.

a) Dados $x, y \in E$, mostrar que se tem

¹⁷Cf. IV.5.14 adiante.

$$\theta(x \times y) = \text{int}_y(*\theta(x)).$$

Sugestão: Aplicar $*$ a ambos os membros da igualdade

$$*\theta(x \times y) = \theta(x) \wedge \theta(y)$$

e utilizar a alínea a) de II.8.17.

b) Deduzir de a) e de II.6.6 que, dados $x, y, z \in E$, tem-se

$$\theta((x \times y) \times z) = \text{int}_z(\theta(x)) \wedge \theta(y) - \theta(x) \wedge \text{int}_z(\theta(y))$$

e concluir daqui que

$$(x \times y) \times z = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x.$$

Ex II.33 Seja E um espaço euclidiano de dimensão n , munido de uma orientação α , e seja w_1, \dots, w_n uma base ortonormada de E . Mostrar que se tem

$$w_1 \times \dots \times w_{j-1} \times w_{j+1} \times \dots \times w_n = \alpha(w_1, \dots, w_n) (-1)^{j-1} w_j.$$

Sugestão: Utilizar a alínea b) de II.8.13.

Ex II.34 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão n .

a) Mostrar que, para cada $0 \leq p \leq n$, pode-se definir um produto interno no espaço vectorial $A^p(E; \mathbb{R})$ pela condição de se ter, para $\xi, \eta \in A^p(E; \mathbb{R})$,

$$\xi \wedge (*\eta) = \langle \xi, \eta \rangle \text{Vol}_E.$$

Sugestão: Ter em conta II.8.15.

b) Mostrar que o produto interno anterior não depende da orientação que se considera em E .

c) Mostrar que, se x_1, \dots, x_n é uma base ortonormada de E , então a base associada de $A^p(E; \mathbb{R})$ é também ortonormada. Deduzir, em particular, que Vol_E é o único elemento positivo de norma 1 de $A^n(E; \mathbb{R})$.

d) Mostrar que são ortogonais os isomorfismos $*$: $A^p(E; \mathbb{R}) \rightarrow A^{n-p}(E; \mathbb{R})$ e θ : $E \rightarrow A^1(E; \mathbb{R})$.

Ex II.35 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Dados $\lambda \in A^1(E; \mathbb{K})$ e $u \in E$, mostrar que

$$\lambda \wedge *\theta(u) = \lambda(u) \text{Vol}_E.$$

Sugestão: Fixar uma base ortonormada directa w_1, \dots, w_n de E tal que $u = a w_1$ e determinar $\lambda \wedge *\theta(u)(w_1, \dots, w_n)$, utilizando a caracterização do produto externo em II.5.12.

CAPÍTULO III

Formas Diferenciais e Teorema de Stokes

§1. Campos tensorais e formas diferenciais.

III.1.1. Sejam E um espaço vectorial real de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade. Dado um espaço vectorial F sobre o corpo \mathbb{K} (igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C}), vamos chamar *campo tensorial (covariante)* de grau p sobre M com valores em F (ou, abreviadamente, *F-campo tensorial sobre M*) a uma família $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$, em que, para cada $x \in M$, $\xi_x \in L^p(T_x(M); F)$ é uma aplicação multilinear de $T_x(M)^p$ em F . É costume omitir a referência a F , ou falar de *campo tensorial real*, no caso em que $F = \mathbb{R}$, e falar de *campo tensorial complexo* no caso em que $F = \mathbb{C}$.

III.1.2. É claro que, no caso em que $p = 0$, um campo tensorial, com valores em F , não é mais do que uma aplicação de M em F .

No que se segue, teremos necessidade de nos referirmos a campos tensoriais suaves. Temos que ser cuidadosos com o que queremos significar com uma tal afirmação, uma vez que, embora um campo tensorial seja uma aplicação de domínio M , trata-se de uma aplicação que, em geral, não está a tomar valores num espaço vectorial fixado (os diferentes espaços de aplicações multilineares $L^p(T_x(M); F)$ não aparecem naturalmente como subespaços vectoriais de um mesmo espaço vectorial).

III.1.3. Sejam $M \subset E$ uma variedade e F um espaço vectorial de dimensão finita sobre \mathbb{K} . Vamos dizer que um F -campo tensorial de grau p , $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ é *suave* se existir uma aplicação suave $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_x)_{x \in M}$, de M em $L^p(E; F)$, tal que, para cada $x \in M$, $\xi_x \in L^p(T_x(M); F)$ seja uma restrição de $\bar{\xi}_x \in L^p(E; F)$ (dizemos então que $\bar{\xi}$ é um *prolongamento suave* de ξ).

III.1.4. É claro que dizer que um campo tensorial de grau 0, com valores em F , é suave é o mesmo que dizer que o é como aplicação de M em F (o prolongamento $\bar{\xi}$ de ξ é neste caso único, e igual ao próprio ξ).

Na mesma ordem de ideias, se a variedade $M \subset E$ é tal que, para cada $x \in M$, $T_x(M) = E$ (é o que acontece se M for um aberto de E ou, mais geralmente, uma variedade, possivelmente com bordo, com dimensão em cada ponto igual à de E), então um campo tensorial de grau p sobre M , com valores em F , não é mais do que uma aplicação de M em $L^p(E; F)$ e o

campo tensorial é suave se, e só se, o for como aplicação (mais uma vez, o prolongamento $\bar{\xi}$ de ξ é único e igual ao próprio ξ).

III.1.5. Sejam $E' \subset E$ dois espaços vectoriais de dimensão finita e $M \subset E'$ uma variedade. Se $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ é um campo tensorial de grau p , sobre M , com valores no espaço vectorial F , tem-se que ξ é suave, quando se considera M como parte de E' , se, e só se, isso acontece quando se considera M como parte de E .

Dem: Suponhamos que ξ é suave, quando se considera M como parte de E . Podemos então considerar uma aplicação suave $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_x)_{x \in M}$, de M em $L^p(E; F)$, tal que cada ξ_x seja uma restrição de $\bar{\xi}_x$, e, compondo com a aplicação linear de $L^p(E; F)$ em $L^p(E'; F)$, que a cada η associa a restrição de η a E'^p , obtemos um prolongamento suave de ξ com valores em $L^p(E'; F)$, o que mostra que ξ é suave, quando se considera M como parte de E' . Suponhamos, reciprocamente, que ξ é suave, quando se considera M como parte de E' . Seja $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_x)_{x \in M}$ uma aplicação suave de M em $L^p(E'; F)$, tal que cada ξ_x seja uma restrição de $\hat{\xi}_x$. Escolhamos uma aplicação linear $\pi: E \rightarrow E'$, tal que $\pi(u) = u$, para cada $u \in E'$ (por exemplo, a projecção ortogonal, para um produto interno que se fixe em E). Podemos então considerar a aplicação linear imagem recíproca $\pi^*: L^p(E'; F) \rightarrow L^p(E; F)$ e verifica-se imediatamente que a família $(\pi^*(\hat{\xi}_x))_{x \in M}$ é um prolongamento suave de ξ , quando se considera M como parte de E . \square

III.1.6. Sejam $M \subset E$ uma variedade, F um espaço vectorial de dimensão finita sobre \mathbb{K} e $F' \subset F$ um subespaço vectorial. Seja $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial de grau p , sobre M , com valores em F' . Tem-se então que ξ é também um campo tensorial com valores em F e ξ é suave como campo tensorial com valores em F se, e só se, o for como campo tensorial com valores em F' .

Dem: A demonstração tem o mesmo espírito que a do resultado precedente: Uma das implicações é trivial e resulta simplesmente de que $L^p(E; F')$ é um subespaço vectorial de $L^p(E; F)$; Para a outra implicação, consideramos uma aplicação linear $\pi: F \rightarrow F'$, tal que $\pi(v) = v$, para cada $v \in F'$, e reparamos que, se $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_x)_{x \in M}$ for um prolongamento suave de ξ , com valores em $L^p(E; F)$, a família dos $\pi \circ \hat{\xi}_x$ é um prolongamento suave de ξ , com valores em $L^p(E; F')$. \square

Por definição, um campo tensorial é suave se admitir um prolongamento suave, mas em geral haverá muitos prolongamentos nessas condições. Em certos casos é cómodo termos um prolongamento suave definido explicitamente. O resultado que se segue mostra uma maneira de conseguir isso, no caso em que fixamos um produto interno no espaço vectorial ambiente da variedade.

III.1.7. Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de um produto interno e $M \subset E$ uma variedade. Para cada $x \in M$, seja $\pi_x: E \rightarrow T_x(M)$ a projecção ortogonal. Se $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ é um campo tensorial suave de grau p sobre M , com valores em F , tem lugar uma aplicação suave $\widehat{\xi} = (\widehat{\xi}_x)_{x \in M}$ de M em $L^p(E; F)$, definida por $\widehat{\xi}_x = \pi_x^*(\xi_x) = \xi_x \circ \pi_x^p$, a qual constitui um prolongamento suave de ξ (diremos que $\widehat{\xi}$ é o *prolongamento euclidiano* de ξ).

Dem: O facto de M ser uma variedade, que implica que o fibrado tangente $T(M) = (T_x(M))_{x \in M}$ é um fibrado vectorial, mostra-nos que é suave a aplicação de M em $L(E; E)$, que a x associa π_x . Por outro lado, vai existir, por definição, uma aplicação suave $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_x)_{x \in M}$, de M em $L^p(E; F)$ tal que cada $\xi_x \in L^p(T_x(M); F)$ seja uma restrição de $\bar{\xi}_x$. Uma vez que tem lugar uma aplicação multilinear, em particular suave,

$$\begin{aligned} L^p(E; F) \times L(E; E) \times \cdots \times L(E; E) &\rightarrow L^p(E; F), \\ (\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_p) &\mapsto \mu \circ (\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_p), \end{aligned}$$

concluimos que tem lugar a aplicação suave de M em $L^p(E; F)$, que a x associa $\bar{\xi}_x \circ \pi_x^p = \xi_x \circ \pi_x^p$, a qual vai ser trivialmente ainda um prolongamento de ξ . \square

III.1.8. Sejam E um espaço vectorial real de dimensão finita e $M \subset E$ uma variedade. Se F é um espaço vectorial, real ou complexo, de dimensão finita, chamamos *forma diferencial de grau p* , com valores em F a um campo tensorial $(\xi_x)_{x \in M}$, de grau p e com valores em F , tal que, para cada $x \in M$, a aplicação p -linear $\xi_x: T_x(M)^p \rightarrow F$ seja alternada, isto é, que, para cada $x \in M$, $\xi_x \in A^p(T_x(M); F)$. Uma tal forma diferencial diz-se *suave* se o for enquanto campo tensorial. Como anteriormente, nos casos em que $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{C}$, falamos também de *formas diferenciais reais* (ou, simplesmente, *formas diferenciais*) e de *formas diferenciais complexas*.

É claro que, nos casos em que $p = 0$ e $p = 1$, uma forma diferencial de grau p é o mesmo que um campo tensorial de grau p e portanto, no primeiro caso, o mesmo que uma aplicação $M \rightarrow F$.

III.1.9. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p sobre M , com valores em F . Existe então uma aplicação suave $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_x)_{x \in M}$, de M em $A^p(E; F)$, tal que, para cada $x \in M$, ξ_x seja uma restrição de $\bar{\xi}_x$.

Dem: Basta considerar um produto interno em E e tomar para $\bar{\xi}$ o prolongamento euclidiano de ξ , tendo em conta III.1.7. \square

Como no capítulo precedente, e uma vez que esse será o quadro que nos vai interessar principalmente, vamos, a partir de agora, concentrar a nossa atenção no caso dos campos tensoriais e formas diferenciais reais ou complexos.

III.1.10. Sejam $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ duas variedades e $f: \widehat{M} \rightarrow M$ uma aplicação suave. Se $\xi = (\xi_y)_{y \in M}$ é um campo tensorial de grau p sobre M , real ou complexo, podemos considerar, para cada $x \in \widehat{M}$, a aplicação linear $Df_x: T_x(\widehat{M}) \rightarrow T_{f(x)}(M)$, e portanto, por ser $\xi_{f(x)} \in L^p(T_{f(x)}(M); \mathbb{K})$, a respectiva imagem recíproca $Df_x^*(\xi_{f(x)}) \in L^p(T_x(\widehat{M}); \mathbb{K})$. Ficamos portanto com um campo tensorial de grau p sobre \widehat{M} , também real ou complexo,

$$f^*\xi = (Df_x^*(\xi_{f(x)}))_{x \in \widehat{M}},$$

a que se dá o nome de *imagem recíproca* de ξ por meio de f . É claro que, se ξ fosse uma forma diferencial, o mesmo ia acontecer a $f^*\xi$.

Repare-se que, examinando a definição de imagem recíproca por meio de uma aplicação linear, se constata imediatamente que

$$(f^*\xi)_x(u_1, \dots, u_p) = \xi_{f(x)}(Df_x(u_1), \dots, Df_x(u_p)).$$

III.1.11. Nas condições anteriores, se o campo tensorial ξ , sobre M , fosse suave, o mesmo ia acontecer ao campo tensorial imagem recíproca $f^*\xi$, sobre \widehat{M} .

Dem: Seja $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_y)_{y \in M}$ uma aplicação suave de M em $L^p(E; \mathbb{K})$, tal que, para cada $y \in M$, $\xi_y \in L^p(T_y(M); \mathbb{K})$ seja uma restrição de $\bar{\xi}_y$. Sejam \widehat{U} um aberto de \widehat{E} , contendo \widehat{M} , e $\widehat{f}: \widehat{U} \rightarrow E$ uma aplicação suave cuja restrição a \widehat{M} seja f . Tem-se então uma aplicação suave de \widehat{U} em $L(\widehat{E}; E)$, definida por $x \mapsto D\widehat{f}_x$, e, para cada $x \in \widehat{M}$, a aplicação linear $Df_x: T_x(\widehat{M}) \rightarrow T_{f(x)}(M)$ é uma restrição de $D\widehat{f}_x: \widehat{E} \rightarrow E$. Considerando a aplicação multilinear, em particular suave,

$$\begin{aligned} L^p(E; \mathbb{K}) \times L(\widehat{E}; E) \times \dots \times L(\widehat{E}; E) &\rightarrow L^p(\widehat{E}; \mathbb{K}), \\ (\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_p) &\mapsto \mu \circ (\lambda_1 \times \dots \times \lambda_p), \end{aligned}$$

obtemos uma aplicação suave de \widehat{M} em $L^p(\widehat{E}; \mathbb{K})$, que a x associa $\bar{\xi}_{f(x)} \circ D\widehat{f}_x^p$, aplicação essa que vai constituir trivialmente um prolongamento suave para $f^*\xi$. \square

III.1.12. Um caso particular importante de imagem recíproca é aquele em que $\widehat{M} \subset M$ e $f: \widehat{M} \rightarrow M$ é a inclusão, definida por $f(x) = x$. A imagem recíproca $f^*\xi$, do campo tensorial ξ de grau p sobre M , costuma então ser notada $\xi|_{\widehat{M}}$ e ser chamada de *restrição* do campo tensorial ξ a \widehat{M} . Repare-se que se trata, em geral, não de uma restrição no sentido estrito, mas de uma espécie de dupla restrição: Por um lado restringimos a aplicação ξ a \widehat{M} e por outro lado, para cada $x \in \widehat{M}$, restringimos o valor $\xi_x \in L^p(T_x(M); \mathbb{K})$, de modo a obter um elemento de $L^p(T_x(\widehat{M}); \mathbb{K})$. De qualquer modo, podemos escrever, para cada $x \in \widehat{M}$ e u_1, \dots, u_p em $T_x(\widehat{M})$, a fórmula tranquilizadora

$$(\xi|_{\widehat{M}})_x(u_1, \dots, u_p) = \xi_x(u_1, \dots, u_p).$$

Como casos particulares em que se obtêm verdadeiras restrições, temos (comparar com o que se disse em III.1.4):

- a) O caso em que $p = 0$; neste caso temos simplesmente a restrição de uma aplicação de M em \mathbb{K} , que vai ser uma aplicação de \widehat{M} em \mathbb{K} ;
- b) O caso em que, para cada $x \in \widehat{M}$, $T_x(\widehat{M}) = T_x(M)$; é o que acontece se \widehat{M} for um aberto de M ou, mais geralmente, se a variedade \widehat{M} tem em cada ponto dimensão igual à de M .

III.1.13. Dentro do mesmo espírito que na alínea a) atrás, se $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ são variedades e $f: \widehat{M} \rightarrow M$ é uma aplicação suave, então, para cada campo tensorial φ sobre M , de grau 0, real ou complexo, φ é simplesmente uma aplicação de M em \mathbb{K} e a forma diferencial imagem recíproca $f^*\varphi$ não é mais do que a aplicação composta $\varphi \circ f: \widehat{M} \rightarrow \mathbb{K}$.

III.1.14. A noção de campo tensorial, ou forma diferencial, imagem recíproca foi definida a partir da noção algébrica de imagem recíproca de um elemento de $L^p(E; \mathbb{K})$ por meio de uma aplicação linear de \widehat{E} em E . Citamos em seguida algumas das propriedades desta noção que se deduzem trivialmente das propriedades correspondentes no quadro algébrico.

- a) Sejam $\widetilde{M} \subset \widetilde{E}$, $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ três variedades e $f: \widetilde{M} \rightarrow \widehat{M}$ e $g: \widehat{M} \rightarrow M$ duas aplicações suaves. Para cada campo tensorial $\xi = (\xi_z)_{z \in M}$ sobre M , tem-se então

$$(g \circ f)^*\xi = f^*(g^*\xi)$$

(atender a II.2.15 e ao facto de se ter $D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x$). Em consequência, e uma vez que se tem evidentemente

$$Id_M^*\xi = \xi,$$

concluimos que, se $g: \widehat{M} \rightarrow M$ fosse um difeomorfismo, então

$$g^{-1*}(g^*\xi) = \xi.$$

- b) Sendo $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ variedades, $f: \widehat{M} \rightarrow M$ uma aplicação suave, $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ e $\eta = (\eta_x)_{x \in M}$ campos tensoriais de grau p sobre M e $a \in \mathbb{K}$, tem-se

$$f^*(\xi + \eta) = f^*\xi + f^*\eta, \quad f^*(a\xi) = a f^*\xi.$$

- c) Sendo $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ variedades, $f: \widehat{M} \rightarrow M$ uma aplicação suave e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ e $\eta = (\eta_x)_{x \in M}$ campos tensoriais de graus p e q sobre M , tem-se

$$f^*(\xi \otimes \eta) = f^*\xi \otimes f^*\eta$$

(cf. II.2.16).

- d) Sendo $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ variedades, $f: \widehat{M} \rightarrow M$ uma aplicação suave e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ e $\eta = (\eta_x)_{x \in M}$ formas diferenciais de graus p e q sobre M ,

tem-se

$$f^*(\xi \wedge \eta) = f^*\xi \wedge f^*\eta$$

(cf. II.5.14).

O resultado que se segue exprime o facto de a noção de campo tensorial suave ser local.

III.1.15. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $(U_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de M de união M . Seja $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial de grau p , sobre M , real ou complexo, tal que, para cada $j \in J$, a restrição $\xi|_{U_j}$ seja um campo tensorial suave sobre U_j . Tem-se então que ξ é suave.

Dem: Considerando o prolongamento euclidiano de ξ , relativamente a um certo produto interno de E , ficamos reduzidos a provar que, se $\widehat{\xi}$ é uma aplicação de M em $L^p(E; \mathbb{K})$, cuja restrição a cada U_j seja suave, então $\widehat{\xi}$ é uma aplicação suave e isso é uma consequência de a suavidade de uma aplicação ser uma questão local. \square

O passo seguinte é reparar que as diferentes operações algébricas envolvendo os espaços de aplicações multilineares ou de aplicações multilineares alternadas conduzem, quando aplicadas fibra a fibra, de campos tensoriais ou formas diferenciais suaves a campos tensoriais ou formas diferenciais suaves. Em muitos casos omitiremos as demonstrações que resultem trivialmente de considerar os prolongamentos euclidianos dos campos tensoriais envolvidos.

III.1.16. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $p \geq 0$. Tem-se então que o conjunto dos campos tensoriais de grau p sobre M , com valores em \mathbb{K} , tem uma estrutura natural de espaço vectorial sobre \mathbb{K} e este espaço vectorial admite como subespaços vectoriais:

- a) O conjunto das formas diferenciais de grau p ;
- b) O conjunto dos campos tensoriais suaves de grau p ;
- c) O conjunto das formas diferenciais suaves de grau p .

III.1.17. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ e $\eta = (\eta_x)_{x \in M}$ campos tensoriais suaves de graus p e q , sobre M , com valores em \mathbb{K} . É então também suave o campo tensorial de grau $p + q$, sobre M $\xi \otimes \eta = (\xi_x \otimes \eta_x)_{x \in M}$. Em particular, se $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação suave (isto é, um campo tensorial suave de grau 0), vem também suave o campo tensorial $f\xi = (f(x)\xi_x)_{x \in M}$.

III.1.18. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial suave de grau p sobre M , com valores em \mathbb{K} . tem-se então:

- a) Para cada permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, vem suave o campo tensorial

$$\widehat{\sigma}(\xi) = (\widehat{\sigma}(\xi_x))_{x \in M};$$

b) Tem lugar uma forma diferencial suave

$$\text{Alt}(\xi) = (\text{Alt}(\xi_x))_{x \in M}.$$

III.1.19. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ e $\eta = (\eta_x)_{x \in M}$ formas diferenciais suaves de graus p e q , sobre M , com valores em \mathbb{K} . É então também suave a forma diferencial de grau $p + q$, sobre a variedade M $\xi \wedge \eta = (\xi_x \wedge \eta_x)_{x \in M}$.

III.1.20. Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade. Para cada $x \in M$, temos então um isomorfismo $\theta_x: T_x(M) \rightarrow L(T_x(M); \mathbb{R})$, definido por $\theta_x(v)(u) = \langle u, v \rangle$. Para cada *campo vectorial* $X = (X_x)_{x \in M}$ sobre M , isto é, para cada família de vectores de E , tal que, para cada $x \in M$, $X_x \in T_x(M)$, notamos então $\theta(X)$ a família $(\theta_x(X_x))_{x \in M}$, que é portanto uma forma diferencial de grau 1 com valores em \mathbb{R} . Do mesmo modo, para cada forma diferencial de grau 1, $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$, com valores em \mathbb{R} , notamos $\theta^{-1}(\omega)$ a família $(\theta_x^{-1}(\omega_x))_{x \in M}$, que é portanto um campo vectorial sobre M . Fica assim estabelecida uma correspondência biunívoca entre campos vectoriais e formas diferenciais de grau 1, com valores em \mathbb{R} .

III.1.21. Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade. Se $X = (X_x)_{x \in M}$ é um campo vectorial sobre M , tem-se que X é suave se, e só se, a forma diferencial $\theta(X) = (\theta_x(X_x))_{x \in M}$ é suave.

Dem: Começemos por supor que X é um campo vectorial suave, ou seja, que é uma aplicação suave de M em E . Por composição com o isomorfismo $\theta: E \rightarrow L(E; \mathbb{R})$, obtemos uma aplicação suave $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_x)_{x \in M}$ de M para $L(E; \mathbb{R})$, definida por $\bar{\omega}_x = \theta(X_x)$, e é trivial que cada aplicação linear $\theta_x(X_x) \in L(T_x(M); \mathbb{R})$ é uma restrição de $L(E; \mathbb{R})$, o que mostra que $\theta(X)$ é uma forma diferencial suave. Suponhamos agora, reciprocamente, que $\theta(X)$ é uma forma diferencial suave. Seja $x_0 \in M$ arbitrário. Seja U um aberto de M , com $x_0 \in U$, tal que exista um campo de referenciais ortonormado X_1, \dots, X_m sobre U , constituído portanto por aplicações suaves de U em E . É então imediato que, para cada $1 \leq j \leq m$, temos uma aplicação suave de U em \mathbb{R} , que a x associa $\theta_x(X_x)(X_{j_x}) = \langle X_x, X_{j_x} \rangle$, pelo que o facto de se ter

$$X_x = \sum_{j=1}^m \langle X_x, X_{j_x} \rangle X_{j_x}$$

mostra que é suave a restrição de X a U . Tendo em conta o facto de a noção de aplicação suave ser local, concluímos finalmente que X é uma aplicação suave de M em E . \square

Examinamos, nos dois resultados seguintes, exemplos importantes da situação que temos estado a estudar.

III.1.22. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação suave. Tem então lugar uma forma diferencial suave de grau 1, $Df = (Df_x)_{x \in M}$.

Dem: Uma vez que, para cada $x \in M$, Df_x é uma aplicação linear de $T_x(M)$ em \mathbb{K} , vemos que Df é realmente uma forma diferencial de grau 1. Por outro lado, podemos considerar um aberto U de E , contendo M , e um prolongamento suave $\bar{f}: U \rightarrow \mathbb{K}$ de f e tem então lugar uma aplicação suave $D\bar{f}: U \rightarrow L(E; \mathbb{K})$. Uma vez que, para cada $x \in M$, $Df_x: T_x(M) \rightarrow \mathbb{K}$ é uma restrição de $D\bar{f}_x: E \rightarrow \mathbb{K}$, concluímos que a forma diferencial Df é suave. \square

III.1.23. (**Corolário**) Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Tem então lugar um campo vectorial suave, $\text{grad}(f)$ sobre M , a que se dá o nome de *gradiente* de f , definido por $\text{grad}(f) = \theta^{-1}(Df)$, ou seja, por

$$\langle u, \text{grad}(f)_x \rangle = Df_x(u),$$

para cada $x \in M$ e $u \in T_x(M)$.

III.1.24. Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m , suavemente orientada. Tem então lugar uma forma diferencial suave de grau m , com valores em \mathbb{R} , $Vol = (Vol_x)_{x \in M}$, chamada *forma diferencial elemento de volume*, em que, para cada $x \in M$, $Vol_x \in A^m(T_x(M); \mathbb{R})$ é o elemento de volume do espaço euclidiano orientado $T_x(M)$.

Dem: Seja $x_0 \in M$ arbitrário. Seja U um aberto de M , com $x_0 \in U$, tal que exista sobre U um campo de referenciais ortonormado suave X_1, \dots, X_m . O facto de a orientação de M ser suave implica que, se necessário restringindo os campos vectoriais a um aberto mais pequeno que ainda contenha x_0 , pode-se já supor que os campos vectoriais constituem em cada $x \in U$ uma base directa de $T_x(M)$ ou constituem em cada $x \in M$ uma base retrógrada de $T_x(M)$. Vem então ou, para cada $x \in U$, $Vol_x = \theta_x(X_{1x}) \wedge \dots \wedge \theta_x(X_{mx})$ ou, para cada $x \in U$, $Vol_x = -\theta_x(X_{1x}) \wedge \dots \wedge \theta_x(X_{mx})$, pelo que $(Vol_x)_{x \in U}$ é uma forma diferencial suave sobre U . Tendo em conta III.1.15, concluímos finalmente que Vol é uma forma diferencial suave. \square

III.1.25. Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m suavemente orientada. Sejam $0 \leq p \leq m$ e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} . Sendo, para cada $x \in M$, $*\omega_x$ a imagem do tensor alternado $\omega_x \in A^p(T_x(M); \mathbb{K})$ pelo isomorfismo

$$*: A^p(T_x(M); \mathbb{K}) \rightarrow A^{m-p}(T_x(M); \mathbb{K}),$$

tem-se então que a forma diferencial $*\omega = (*\omega_x)_{x \in M}$, de grau $m - p$, é tam-

bém suave.

Dem: Seja $x_0 \in M$ arbitrário. Seja U um aberto de M , com $x_0 \in U$, tal que exista sobre U um campo de referenciais ortonormado suave X_1, \dots, X_m . O facto de a orientação de M ser suave implica que, se necessário restringindo os campos vectoriais a um aberto mais pequeno que ainda contenha x_0 , pode-se já supor que os campos vectoriais constituem em cada $x \in U$ uma base directa de $T_x(M)$ ou constituem em cada $x \in M$ uma base retrógrada de $T_x(M)$. Notemos $\varepsilon = 1$, no primeiro caso, e $\varepsilon = -1$, no segundo. Uma vez que, tendo em conta II.8.5 e II.5.9, os elementos da base de $A^p(T_x(M); \mathbb{K})$ associados à base X_{1x}, \dots, X_{mx} de $T_x(M)$ são os $\theta_x(X_{i_1x}) \wedge \dots \wedge \theta_x(X_{i_px})$, sabemos que se tem, para cada $x \in U$,

$$\omega_x = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_x(X_{i_1x}, \dots, X_{i_px}) \theta_x(X_{i_1x}) \wedge \dots \wedge \theta_x(X_{i_px}),$$

onde, para cada $i_1 < \dots < i_p$ é trivialmente suave a aplicação $U \rightarrow \mathbb{K}$,

$$x \mapsto \omega_x(X_{i_1x}, \dots, X_{i_px}).$$

Tendo em conta a alínea b) de II.8.13, tem-se, notando, como é usual, para cada $i_1 < \dots < i_p$ em $\{1, \dots, m\}$, $i_{p+1} < \dots < i_m$ os restantes índices,

$$*\omega_x = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \varepsilon \text{sg}(\{i_1, \dots, i_p\}) \omega_x(X_{i_1x}, \dots, X_{i_px}) \theta_x(X_{i_{p+1}x}) \wedge \dots \wedge \theta_x(X_{i_mx}),$$

o que mostra que a restrição de $*\omega$ a U é suave. Podemos aplicar agora III.1.15 para garantir que $*\omega$ é suave. \square

§2. Derivada exterior duma forma diferencial.

III.2.1. Recordemos que, se $M \subset E$ é uma variedade e se $X = (X_x)_{x \in M}$ e $Y = (Y_x)_{x \in M}$ são campos vectoriais suaves, então, embora os vectores $DY_x(X_x)$ e $DX_x(Y_x)$ de E não pertençam, em geral, a $T_x(M)$, a diferença

$$[X, Y]_x = DY_x(X_x) - DX_x(Y_x)$$

já pertence a $T_x(M)$, o que nos permite considerar um novo campo vectorial suave $[X, Y]$ sobre M , o *parêntesis de Lie* de X e Y , que a cada x associa $[X, Y]_x$.

III.2.2. Seja $M \subset E$ uma variedade e seja $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p , real ou complexa. Existe então uma, e uma só, forma diferencial $d\omega$, de grau $p + 1$, a que daremos o nome de *derivada exterior* de ω , tal que, qualquer que seja a aplicação suave $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_x)_{x \in M}$, de M em $A^p(E; \mathbb{K})$, com cada ω_x restrição de $\bar{\omega}_x$, se tenha

$$\begin{aligned} (d\omega)_x(u_1, \dots, u_{p+1}) &= \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D\bar{\omega}_x(u_j)(u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_{p+1}). \end{aligned}$$

Além disso, se, para cada $1 \leq j \leq p+1$, $X_j = (X_{j_x})_{x \in M}$ é um campo vectorial suave sobre M , tem-se

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D(\omega(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{p+1}))(X_j) + \\ &\quad + \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_{p+1}).^{18} \end{aligned}$$

Dem: A unicidade de uma forma diferencial $d\omega$, verificando a condição do enunciado, resulta de existência de pelo menos uma aplicação suave $\bar{\omega}$ de M em $A^p(E; \mathbb{K})$, tal que cada ω_x seja uma restrição de $\bar{\omega}_x$ (cf. III.1.9).

Suponhamos agora que $x_0 \in M$ e que $u_1, \dots, u_{p+1} \in T_{x_0}(M)$. Podemos então considerar campos vectoriais suaves X_1, \dots, X_{p+1} , com $X_{j_{x_0}} = u_j$ (tomar, por exemplo, $X_{j_x} = \pi_x(u_j)$). Vamos mostrar que, quaisquer que sejam os X_j nestas condições, e qualquer que seja a aplicação suave $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_x)_{x \in M}$, de M em $A^p(E; \mathbb{K})$, com cada ω_x restrição de $\bar{\omega}_x$, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D\bar{\omega}_{x_0}(u_j)(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{p+1}) &= \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}))_{x_0}(u_j) + \\ &= + \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \omega_{x_0}([X_j, X_k]_{x_0}, u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_{p+1}); \end{aligned}$$

Se o fizermos, ficará provado que o segundo membro da primeira igualdade do enunciado não depende da escolha de $\bar{\omega}$, o que nos dá um elemento bem

¹⁸Neste enunciado, como em várias ocasiões adiante, aparecem expressões em que figuram os elementos de uma certa sucessão indexada de 1 a n , com a excepção de um ou mais. Uma convenção que se utiliza com frequência e que se revela mais económica no que diz respeito ao comprimento das expressões escritas, consiste em escrever com um “ $\hat{}$ ” em cima dos termos que são omitidos. Assim, por exemplo, em vez de

$$D\bar{\omega}_x(u_j)(u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_{p+1}),$$

podemos escrever

$$D\bar{\omega}_x(u_j)(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{p+1}).$$

definido $(d\omega)_{x_0} \in L^p(T_{x_0}(M); \mathbb{K})$, e ao mesmo tempo ficará demonstrada a segunda igualdade do enunciado¹⁹. Ora, vem

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1}))_{x_0}(u_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D(\bar{\omega}(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1}))_{x_0}(u_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D\bar{\omega}_{x_0}(u_j)(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \sum_{k < j} \bar{\omega}_{x_0}(u_1, \dots, u_{k-1}, DX_{kx_0}(u_j), u_{k+1}, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \sum_{k > j} \bar{\omega}_{x_0}(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{k-1}, DX_{kx_0}(u_j), u_{k+1}, \dots, u_{p+1}) = \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D\bar{\omega}_{x_0}(u_j)(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) + \\
&\quad + \sum_{k < j} (-1)^{j-1} (-1)^{k-1} \bar{\omega}_{x_0}(DX_{kx_0}(u_j), u_1, \dots, \widehat{u}_k, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) + \\
&\quad + \sum_{k > j} (-1)^{j-1} (-1)^{k-2} \bar{\omega}_{x_0}(DX_{kx_0}(u_j), u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, \widehat{u}_k, \dots, u_{p+1}).
\end{aligned}$$

Trocando no penúltimo somatório os índices j e k , podemos portanto escrever

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1}))_{x_0}(u_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D\bar{\omega}_{x_0}(u_j)(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) - \\
&\quad - \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \bar{\omega}_{x_0}(DX_{kx_0}(u_j) - DX_{jx_0}(u_k), u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, \widehat{u}_k, \dots, u_{p+1}) = \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D\bar{\omega}_{x_0}(u_j)(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) - \\
&\quad - \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \bar{\omega}_{x_0}([X_j, X_k]_{x_0}, u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, \widehat{u}_k, \dots, u_{p+1}),
\end{aligned}$$

o que estabelece a igualdade pretendida. Resta-nos agora verificar que, para

¹⁹O raciocínio aqui é aquele que leva a concluir que, se tivermos duas aplicações $f: A \rightarrow C$ e $g: B \rightarrow C$ tais que, quaisquer que sejam $x \in A$ e $y \in B$, $f(x) = g(y)$, então f e g são constantes e com um valor constante comum.

cada $x_0 \in M$, a aplicação multilinear $(d\omega)_{x_0} \in L^p(T_{x_0}(M); \mathbb{K})$, definida pela primeira igualdade do enunciado, pertence mesmo a $A^p(T_{x_0}(M); \mathbb{K})$. Ora, considerando o elemento

$$D\bar{\omega}_{x_0} \in L(T_{x_0}(M); A^p(E; \mathbb{K})),$$

podemos notar ρ o elemento de $L^{p+1}(T_{x_0}(M); \mathbb{K})$, definido por

$$\rho(u_1, \dots, u_{p+1}) = D\bar{\omega}_{x_0}(u_1)(u_2, \dots, u_{p+1}),$$

elemento esse que é portanto alternado nas últimas p variáveis, pelo que, tendo em conta o lema II.5.11, concluímos que

$$(d\omega)_{x_0} = (p+1) \text{Alt}(\rho),$$

em particular $(d\omega)_{x_0}$ é alternado. \square

III.2.3. Tal como se disse em III.1.4, há duas situações em que, nas condições anteriores, o prolongamento $\bar{\omega}$ é único, e coincide com o próprio ω :

a) A primeira situação é aquela em que $p = 0$; a forma diferencial de grau 0 é simplesmente uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ e a identidade que nos serviu para definir $d\omega$ escreve-se simplesmente

$$df_x(u) = Df_x(u),$$

por outras palavras a forma diferencial de grau 1, com valores em \mathbb{K} , df , não é mais do que a forma diferencial Df , referida em III.1.22.

b) A segunda situação é aquela em que, para cada $x \in M$, $T_x(M) = E$; é o que acontece no caso em que M é um aberto de E ou, mais geralmente, uma variedade, possivelmente com bordo, com dimensão em cada ponto igual à de E . Nesse caso a fórmula de definição escreve-se simplesmente

$$\begin{aligned} (d\omega)_x(u_1, \dots, u_{p+1}) &= \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D\omega_x(u_j)(u_1, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_{p+1}). \end{aligned}$$

III.2.4. **(Lema)** Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p , real ou complexa. Existe então um aberto U de E , com $M \subset U$, e uma forma diferencial suave $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_x)_{x \in U}$, de grau p , tal que $\omega = \tilde{\omega}|_M$ (restrição enquanto forma diferencial, cf. III.1.12). Além disso, qualquer que seja $\tilde{\omega}$ nestas condições, tem-se que $d\omega = (d\tilde{\omega})|_M$.

Dem: Trata-se de um resultado essencialmente trivial, que resulta de notar que dizer que $\tilde{\omega}$ é uma forma diferencial sobre um aberto U de E , contendo M , tal que $\tilde{\omega}|_M = \omega$, é o mesmo que dizer que $\tilde{\omega}$ é um prolongamento suave a U de uma aplicação suave $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_x)_{x \in M}$, de M em $A^p(E; \mathbb{K})$, tal que cada ω_x seja uma restrição de $\bar{\omega}_x$. \square

O lema anterior permite reduzir de forma trivial a demonstração de várias propriedades da derivação exterior ao caso em que as formas diferenciais estão definidas num aberto de E , quadro em que é desnecessário considerar prolongamentos para as formas diferenciais. Como primeiro exemplo, temos:

III.2.5. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p , real ou complexa. Tem-se então que a forma diferencial $d\omega$, de grau $p + 1$, é também suave.

Dem: Tendo em conta o resultado anterior, basta demonstrar isto no caso particular em que M é um aberto de E . Nesse caso, ω é simplesmente uma aplicação suave de M em $A^p(E; \mathbb{K})$, a partir da qual obtemos uma aplicação suave $D\omega: M \rightarrow L(E; A^p(E; \mathbb{K}))$. Composto $D\omega$ com o isomorfismo canónico de $L(E; L^p(E; \mathbb{K}))$ sobre $L^{p+1}(E; \mathbb{K})$ e com a aplicação linear de $L^{p+1}(E; \mathbb{K})$ em $L^{p+1}(E; \mathbb{K})$, que a cada λ associa a aplicação multilinear definida por

$$(u_1, \dots, u_{p+1}) \mapsto \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \lambda(u_j, u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{p+1}),$$

obtemos precisamente a forma diferencial $d\omega$, o que mostra que esta é suave. \square

III.2.6. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ e $\sigma = (\sigma_x)_{x \in M}$ duas formas diferenciais suaves de grau p , com valores em \mathbb{K} e $a \in \mathbb{K}$. Tem-se então

$$d(\omega + \sigma) = d\omega + d\sigma, \quad d(a\omega) = a d\omega.$$

Dem: Como anteriormente, podemos reduzir-nos ao caso em que M é um aberto de E e nesse caso a demonstração é trivial. \square

III.2.7. Sejam $\hat{M} \subset \hat{E}$ e $M \subset E$ duas variedades e $f: \hat{M} \rightarrow M$ uma aplicação suave. Se $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ é uma forma diferencial de grau p , sobre M , com valores em \mathbb{K} , tem-se então

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega).$$

Dem: Começemos por demonstrar o resultado no caso particular em que \hat{M} e M são abertos de \hat{E} e de E , respectivamente. Uma vez que

$$(d\omega)_y(w_1, \dots, w_{p+1}) = \sum_j (-1)^{j-1} D\omega_y(w_j)(w_1, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_{p+1}),$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} (f^*(d\omega))_x(u_1, \dots, u_{p+1}) &= (d\omega)_{f(x)}(Df_x(u_1), \dots, Df_x(u_{p+1})) = \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} D\omega_{f(x)}(Df_x(u_j))(Df_x(u_1), \dots, Df_x(\widehat{u_j}), \dots, Df_x(u_{p+1})). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (d(f^*\omega))_x(u_1, \dots, u_{p+1}) &= \sum_j (-1)^{j-1} D(f^*\omega)_x(u_j)(u_1, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_{p+1}) = \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} D((f^*\omega)(u_1, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_{p+1}))_x(u_j), \end{aligned}$$

pelo que, uma vez que

$$\begin{aligned} (f^*\omega)_x(u_1, \dots, \widehat{u_j}, \dots, u_{p+1}) &= \\ &= \omega_{f(x)}(Df_x(u_1), \dots, Df_x(\widehat{u_j}), \dots, Df_x(u_{p+1})), \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} (d(f^*\omega))_x(u_1, \dots, u_{p+1}) &= \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} D\omega_{f(x)}(Df_x(u_j))(Df_x(u_1), \dots, Df_x(\widehat{u_j}), \dots, Df_x(u_{p+1})) + \\ &+ \sum_j (-1)^{j-1} \sum_{k < j} \omega_{f(x)}(Df_x(u_1), \dots, D^2 f_x(u_j, u_k), \dots, Df_x(\widehat{u_j}), \dots, Df_x(u_{p+1})) + \\ &+ \sum_j (-1)^{j-1} \sum_{k > j} \omega_{f(x)}(Df_x(u_1), \dots, Df_x(\widehat{u_j}), \dots, D^2 f_x(u_j, u_k), \dots, Df_x(u_{p+1})) = \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} D\omega_{f(x)}(Df_x(u_j))(Df_x(u_1), \dots, Df_x(\widehat{u_j}), \dots, Df_x(u_{p+1})) + \\ &+ \sum_{k < j} (-1)^{j+k-2} \omega_{f(x)}(D^2 f_x(u_j, u_k), Df_x(u_1), \dots, Df_x(\widehat{u_k}), \dots, Df_x(\widehat{u_j}), \dots, Df_x(u_{p+1})) + \\ &+ \sum_{k > j} (-1)^{j+k-3} \omega_{f(x)}(D^2 f_x(u_j, u_k), Df_x(u_1), \dots, Df_x(\widehat{u_j}), \dots, Df_x(\widehat{u_k}), \dots, Df_x(u_{p+1})). \end{aligned}$$

Trocando j com k no último somatório, e tendo em conta o facto de $D^2 f_x$ ser uma aplicação bilinear simétrica, constatamos que os dois últimos somatórios são simétricos um do outro pelo que, comparando com a fórmula para $(f^*(d\omega))_x(u_1, \dots, u_{p+1})$ obtida acima, temos o resultado demonstrado neste caso particular. Passemos agora ao caso geral em que \widehat{M} e M são variedades quaisquer. Podemos então começar por considerar um aberto V de E , com $M \subset V$, e uma forma diferencial suave $\tilde{\omega}$, de grau p , sobre V , tal que $\omega = \tilde{\omega}|_M$. Sejam U um aberto de \widehat{E} , com $\widehat{M} \subset U$, e $\tilde{f}: U \rightarrow E$ um prolongamento suave da aplicação f . A continuidade de \tilde{f} mostra-nos que, se necessário substituindo U por um aberto mais pequeno e \tilde{f} pela sua restrição, pode-se já supor que $\tilde{f}(U) \subset V$. O caso particular já demonstrado garante-nos que $d(\tilde{f}^*\tilde{\omega}) = \tilde{f}^*(d\tilde{\omega})$ e basta agora repararmos que, por um

lado, $f^*\omega$ é a restrição de $\tilde{f}^*\tilde{\omega}$ a \hat{M} (trivial ou, se preferirmos, podemos reparar que a restrição é a mesma coisa que a imagem recíproca pela inclusão), e portanto, pelo lema III.2.4, $d(f^*\omega)$ é a restrição de $d(\tilde{f}^*\tilde{\omega})$ a \hat{M} e, por outro lado, $d\omega$ é a restrição de $d\tilde{\omega}$ a M e portanto $f^*(d\omega)$ é a restrição de $\tilde{f}^*(d\tilde{\omega})$ a \hat{M} . \square

III.2.8. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p . Tem-se então $d(d\omega) = 0$.

Dem: Como anteriormente, é suficiente fazer a demonstração no caso particular em que M é um aberto de E . Podemos então escrever

$$\begin{aligned} (d(d\omega))_x(u_1, \dots, u_{p+2}) &= \\ &= \sum_{j=1}^{p+2} (-1)^{j-1} D(d\omega)_x(u_j)(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{p+2}) = \\ &= \sum_{j=1}^{p+2} (-1)^{j-1} D(d\omega(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{p+2}))_x(u_j). \end{aligned}$$

Uma vez que se tem

$$\begin{aligned} (d\omega)_x(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{p+2}) &= \\ &= \sum_{k < j} (-1)^{k-1} D\omega_x(u_k)(u_1, \dots, \hat{u}_k, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{p+2}) + \\ &= + \sum_{k > j} (-1)^{k-2} D\omega_x(u_k)(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_{p+2}), \end{aligned}$$

obtemos agora

$$\begin{aligned} (d(d\omega))_x(u_1, \dots, u_{p+2}) &= \\ &= \sum_{k < j} (-1)^{j+k-2} D^2\omega_x(u_j, u_k)(u_1, \dots, \hat{u}_k, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{p+2}) + \\ &= + \sum_{k > j} (-1)^{j+k-3} D^2\omega_x(u_j, u_k)(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, \hat{u}_k, \dots, u_{p+2}) = 0, \end{aligned}$$

visto que os dois somatórios são simétricos um do outro, como se reconhece se trocarmos j com k no segundo somatório e repararmos que $D^2\omega_x$ é uma aplicação bilinear simétrica. \square

Vamos agora estabelecer uma fórmula, do tipo regra de Leibnitz, para a derivada exterior do produto exterior de duas formas diferenciais. Começamos, para isso, com um lema, em que a primeira forma diferencial tem grau 0, isto é, é uma função.

III.2.9. **(Lema)** Sejam $M \subset E$ uma variedade, $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} , e $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação suave. Tem-se então, para a forma diferencial suave $f\omega = f \wedge \omega$,

$$d(f\omega) = f d\omega + (df) \wedge \omega.$$

Dem: Como habitualmente, podemos-nos reduzir ao caso em que M é um aberto de E . Obtemos então

$$\begin{aligned} (d(f\omega))_x(u_1, \dots, u_{p+1}) &= \\ &= \sum_j (-1)^{j-1} D(f\omega)_x(u_j)(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) = \\ &= f_x \sum_j (-1)^{j-1} D\omega_x(u_j)(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) + \\ &\quad + \sum_j (-1)^{j-1} Df_x(u_j) \omega_x(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) = \\ &= (f d\omega)_x(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) + (df \wedge \omega)_x(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}), \end{aligned}$$

onde, para a interpretação do último somatório, tivémos em conta a caracterização do produto exterior referida em II.5.12. \square

III.2.10. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ e $\sigma = (\sigma_x)_{x \in M}$ duas formas diferenciais suaves, de graus p e q , respectivamente, com valores em \mathbb{K} . Tem-se então

$$d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^p \omega \wedge (d\sigma).$$

Dem: Mais uma vez, basta demonstrar o resultado no caso particular em que M é um aberto de E . Fixando uma base w_1, \dots, w_n de E , sabemos que, para cada $x \in M$, $\omega_x \in A^p(E; \mathbb{K})$ e $\sigma_x \in A^q(E; \mathbb{K})$ se decompõem nas bases associadas daqueles espaços:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \sum_{j_1 < \dots < j_p} \omega_x(w_{j_1}, \dots, w_{j_p}) \xi_{\wedge j_1, \dots, j_p}, \\ \sigma_x &= \sum_{k_1 < \dots < k_q} \sigma_x(w_{k_1}, \dots, w_{k_q}) \xi_{\wedge k_1, \dots, k_q}. \end{aligned}$$

O que nos interessa da decomposição anterior é saber que existem conjuntos finitos de índices, A e B , e, para cada $\alpha \in A$ e $\beta \in B$, formas diferenciais constantes λ_α , de grau p , e μ_β , de grau q (portanto, trivialmente, com $d\lambda_\alpha = 0$ e $d\mu_\beta = 0$), e aplicações suaves $f_\alpha: M \rightarrow \mathbb{K}$ e $g_\beta: M \rightarrow \mathbb{K}$, de modo que se tenha

$$\omega = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \lambda_{\alpha}, \quad \sigma = \sum_{\beta} g_{\beta} \mu_{\beta}.$$

Tendo em conta o lema precedente, a propriedade algébrica de \pm -comutativi-

dade do produto exterior e a regra de Leibnitz para a derivação do produto de duas funções, podemos agora escrever

$$\begin{aligned}
 d(\omega \wedge \sigma) &= d\left(\sum_{\alpha,\beta} f_\alpha g_\beta (\lambda_\alpha \wedge \mu_\beta)\right) = \sum_{\alpha,\beta} d(f_\alpha g_\beta) \wedge \lambda_\alpha \wedge \mu_\beta = \\
 &= \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha dg_\beta \wedge \lambda_\alpha \wedge \mu_\beta + \sum_{\alpha,\beta} g_\beta df_\alpha \wedge \lambda_\alpha \wedge \mu_\beta = \\
 &= (-1)^p \sum_{\alpha,\beta} (f_\alpha \lambda_\alpha) \wedge (dg_\beta \wedge \mu_\beta) + \sum_{\alpha,\beta} (df_\alpha \wedge \lambda_\alpha) \wedge (g_\beta \mu_\beta) = \\
 &= (-1)^p \left(\sum_\alpha f_\alpha \lambda_\alpha\right) \wedge \left(\sum_\beta dg_\beta \wedge \mu_\beta\right) + \left(\sum_\alpha df_\alpha \wedge \lambda_\alpha\right) \wedge \left(\sum_\beta g_\beta \mu_\beta\right) = \\
 &= (-1)^p \omega \wedge (d\sigma) + (d\omega) \wedge \sigma,
 \end{aligned}$$

donde o resultado. \square

Vamos agora verificar como o operador de diferenciação exterior d intervém na definição dos operadores clássicos do cálculo vectorial. Um primeiro exemplo disso foi já apresentado, quando nos referimos em III.1.23 à definição do gradiente duma função suave, com valores reais.

III.2.11. Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$ que, para simplificar, suporemos suavemente orientada. Dado um campo vectorial suave $X = (X_x)_{x \in M}$, define-se então uma aplicação suave $\text{div}(X): M \rightarrow \mathbb{R}$, chamada *divergência* de X , por

$$\text{div}(X) = *(d(*\theta(X))).^{20}$$

A razão por que exigimos que a variedade M estivesse suavemente orientada foi para podermos utilizar os operadores $*$. No entanto, uma vez que estes aparecem duas vezes na definição e que eles vêm multiplicados por -1 quando se troca a orientação de um espaço euclidiano, constatamos que, se trocássemos a orientação em todos os espaços vectoriais tangentes, o operador de divergência obtido não se alterava. Raciocinando na vizinhança de cada ponto de M , poderíamos concluir que a definição da divergência é independente da orientação suave que se considera em M e poderia mesmo ser dada para uma variedade que não admitisse nenhuma orientação suave (localmente todas as variedades são orientáveis). Não detalhamos mais estas observações para não tornar o texto mais pesado, mas o leitor poderá facilmente fazê-lo.

²⁰Repare-se que $\theta(X)$ é uma forma diferencial real suave de grau 1 pelo que $*\theta(X)$ é uma forma diferencial suave de grau $m - 1$, $d(*\theta(X))$ é uma forma diferencial suave de grau m e, finalmente, $*(d(*\theta(X)))$ é uma forma diferencial suave de grau 0, isto é, uma aplicação suave $M \rightarrow \mathbb{R}$.

III.2.12. Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$ que, mais uma vez para simplificar, suporemos suavemente orientada. Se $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação suave, define-se o seu *laplaciano* como sendo a aplicação suave $\Delta f: M \rightarrow \mathbb{K}$,

$$\Delta f = *d(*df).^{21}$$

Repare-se que, no caso particular em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tem-se $df = \theta(\text{grad}(f))$ pelo que a definição anterior pode ser reescrita na forma

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)).$$

III.2.13. Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão 3 suavemente orientada. Se $X = (X_x)_{x \in M}$ é um campo vectorial suave sobre M , define-se o seu *rotacional* $\text{rot}(X)$ como sendo o campo vectorial suave

$$\text{rot}(X) = \theta^{-1}(*d(\theta(X))).^{22}$$

Vamos agora apresentar fórmulas alternativas para os operadores diferenciais que estudámos atrás, no caso particular em que a variedade M é um aberto de E ou, mais geralmente, tem dimensão igual à de E em todos os pontos. Isso permitir-nos-á, em particular, reconhecer as definições destes operadores, porventura já encontradas no quadro do Cálculo Vectorial clássico. Com frequência, o espaço euclidiano E , a que nos referiremos, será \mathbb{R}^m e a base ortonormada considerada será a base canónica. Nesse caso, as derivadas duma função na direcção dos vectores da base serão evidentemente as derivadas parciais usuais.

III.2.14. Sejam E um espaço euclidiano, com uma base ortonormada w_1, \dots, w_m , e $M \subset E$ um aberto ou, mais geralmente, uma variedade com dimensão m em cada ponto. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação suave. Tem-se então, para cada $x \in M$,

$$df_x = \sum_{j=1}^m Df_x(w_j) \theta(w_j)$$

e, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

²¹Repare-se que df é uma forma diferencial suave de grau 1, com valores em \mathbb{K} , pelo que $*df$ é uma forma diferencial suave de grau $m - 1$, $d(*df)$ é uma forma diferencial suave de grau m e, finalmente, $*d(*df)$ é uma forma diferencial de grau 0, isto é, uma aplicação suave $M \rightarrow \mathbb{K}$.

²²Ao contrário do que sucedia com a divergência e o laplaciano, a orientação de M é essencial para a definição do rotacional. Repare-se que $\theta(X)$ é uma forma diferencial suave de grau 1, pelo que $d(\theta(X))$ é uma forma diferencial suave de grau 2, $*d(\theta(X))$ é uma forma diferencial suave de grau $3 - 2 = 1$ e, finalmente, $\theta^{-1}(*d(\theta(X)))$ é um campo vectorial suave sobre M .

$$\text{grad}(f)_x = \sum_{j=1}^m Df_x(w_j) w_j.$$

Em particular, no caso em que $E = \mathbb{R}^m$ e w_1, \dots, w_m é a base canónica, podemos escrever, respectivamente,

$$df_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \theta(w_j),$$

$$\text{grad}(f)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right).$$

Dem: Uma vez que a base é ortonormada, sabemos que os $\theta(w_j)$ são os elementos da base de $L(E; \mathbb{K})$ associada à base w_1, \dots, w_m de E pelo que, uma vez que $df_x(w_j) = Df_x(w_j)$, a primeira fórmula é simplesmente um caso particular de II.2.5. A segunda fórmula resulta da primeira por aplicação do isomorfismo θ^{-1} a ambos os membros desta. \square

III.2.15. **(Nota)** Ainda no caso em que $E = \mathbb{R}^m$ e a base considerada é a canónica, é costume usar as notações dx_1, \dots, dx_m em vez de $\theta(w_1), \dots, \theta(w_m)$. Estas notações, cujas motivações seria longo discutir, podem ser justificadas no quadro anterior desde que olhemos para cada x_j como sendo a aplicação linear que a cada $x \in \mathbb{R}^m$ associa a sua componente de ordem j , visto que o respectivo diferencial dx_j é então igual, em cada ponto, a $\theta(w_j)$. Com estas notações pode-se portanto escrever a fórmula clássica

$$df_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j.$$

No caso em que m é pequeno usam-se formulações particulares como, no caso de \mathbb{R}^3 ,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

III.2.16. Seja E um espaço euclidiano, com dimensão $m \geq 1$, com uma base ortonormada w_1, \dots, w_m , e seja $M \subset E$ um aberto ou, mais geralmente, uma variedade com dimensão m em cada ponto. Seja $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave sobre M e sejam $f_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ as funções suaves componentes de X , definidas por $X_x = \sum f_j(x) w_j$. Considerando então em M a orientação associada a uma das orientações de E , tem-se

$$\text{div}(X)_x = \sum_{j=1}^m Df_{j_x}(w_j).$$

Em particular, no caso em que $E = \mathbb{R}^m$, sendo $X_x = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, vem

$$\operatorname{div}(X)_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x).$$

Dem: Seja $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ a orientação da base w_1, \dots, w_m de E e consideremos em M a orientação suave correspondente (lembrar que $T_x(M) = E$, para cada $x \in M$). Uma vez que $\theta(w_1), \dots, \theta(w_m)$ é a base de $L(E; \mathbb{R})$ associada à base ortonormada w_1, \dots, w_m de E , vemos que

$$\begin{aligned} * \theta(X_x) &= \sum_{j=1}^m f_j(x) * \theta(w_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon (-1)^{j-1} f_j(x) \theta(w_1) \wedge \dots \wedge \widehat{\theta(w_j)} \wedge \dots \wedge \theta(w_m), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d(* \theta(X))_x &= \sum_{j=1}^m \varepsilon (-1)^{j-1} df_{j_x} \wedge \theta(w_1) \wedge \dots \wedge \widehat{\theta(w_j)} \wedge \dots \wedge \theta(w_m) = \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^m Df_{j_x}(w_k) \theta(w_k) \wedge \theta(w_1) \wedge \dots \wedge \widehat{\theta(w_j)} \wedge \dots \wedge \theta(w_m) = \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon (-1)^{j-1} Df_{j_x}(w_j) \theta(w_j) \wedge \theta(w_1) \wedge \dots \wedge \widehat{\theta(w_j)} \wedge \dots \wedge \theta(w_m) = \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon Df_{j_x}(w_j) \theta(w_1) \wedge \dots \wedge \theta(w_j) = \left(\sum_{j=1}^m Df_{j_x}(w_j) \right) \operatorname{Vol}_E, \end{aligned}$$

o que implica finalmente que

$$\operatorname{div}(X)_x = *d(* \theta(X))_x = \sum_{j=1}^m Df_{j_x}(w_j). \square$$

III.2.17. Seja E um espaço euclidiano, com dimensão $m \geq 1$, com uma base ortonormada w_1, \dots, w_m , e seja $M \subset E$ um aberto ou, mais geralmente, uma variedade com dimensão m em cada ponto. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação suave. Considerando então em M a orientação associada a uma das orientações de E , tem-se

$$\Delta f_x = \sum_{j=1}^m D^2 f_x(w_j, w_j).$$

Em particular, no caso em que $E = \mathbb{R}^m$, tem-se

$$\Delta f_x = \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x).^{23}$$

Dem: No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o resultado é uma consequência imediata de III.2.14 e de III.2.16. Para o caso geral, tudo o que temos que fazer é unir as respectivas demonstrações e fazer um pequeno curto-circuito: Notemos, como anteriormente, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ a orientação da base w_1, \dots, w_m . Uma vez que $df_x = \sum Df_x(w_j) \theta(w_j)$, obtemos

$$\begin{aligned} *df_x &= \sum_{j=1}^m Df_x(w_j) * \theta(w_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon (-1)^{j-1} Df_x(w_j) \theta(w_1) \wedge \dots \wedge \widehat{\theta(w_j)} \wedge \dots \wedge \theta(w_m) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} d(*df)_x &= \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^m D^2 f_x(w_k, w_j) \theta(w_k) \wedge \theta(w_1) \wedge \dots \wedge \widehat{\theta(w_j)} \wedge \dots \wedge \theta(w_m) = \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon (-1)^{j-1} D^2 f_x(w_j, w_j) \theta(w_j) \wedge \theta(w_1) \wedge \dots \wedge \widehat{\theta(w_j)} \wedge \dots \wedge \theta(w_m) = \\ &= \sum_{j=1}^m \varepsilon D^2 f_x(w_j, w_j) \theta(w_1) \wedge \dots \wedge \theta(w_m) = \sum_{j=1}^m D^2 f_x(w_j, w_j) Vol_E, \end{aligned}$$

$$\Delta f_x = *d(*df)_x = \sum_{j=1}^m D^2 f_x(w_j, w_j). \square$$

III.2.18. Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão 3, com uma base ortonormada directa w_1, w_2, w_3 , e seja $M \subset E$ um aberto ou, mais geralmente, uma variedade com dimensão 3 em cada ponto. Seja $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e sejam $f_1, f_2, f_3: M \rightarrow \mathbb{R}$ as aplicações suaves componentes de X , definidas por

$$X_x = f_1(x) w_1 + f_2(x) w_2 + f_3(x) w_3.$$

Tem-se então, para cada $x \in M$,

²³A definição de derivada de segunda ordem de uma função num ponto costuma por vezes ser apresentada apenas no caso em que o domínio da função é um conjunto aberto. É no entanto imediato constatar-se que essa definição faz perfeitamente sentido no caso mais geral em que o domínio é total, no sentido que o espaço vectorial tangente a este em cada um dos seus pontos é o espaço todo, visto que isso garante que a primeira derivada é uma aplicação suave com valores num espaço vectorial fixado.

$$\begin{aligned} \text{rot}(X)_x &= (Df_{3x}(w_2) - Df_{2x}(w_3))w_1 + (Df_{1x}(w_3) - Df_{3x}(w_1))w_2 + \\ &\quad + (Df_{2x}(w_1) - Df_{1x}(w_2))w_3. \end{aligned}$$

Em particular, no caso em que $E = \mathbb{R}^3$, sendo $X_x = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, tem-se

$$\text{rot}(X) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right).$$

Dem: Vem

$$\theta(X_x) = f_1(x)\theta(w_1) + f_2(x)\theta(w_2) + f_3(x)\theta(w_3),$$

pelo que

$$\begin{aligned} d(\theta(X))_x &= \sum_{j=1}^3 Df_{1x}(w_j)\theta(w_j) \wedge \theta(w_1) + \sum_{j=1}^3 Df_{2x}(w_j)\theta(w_j) \wedge \theta(w_2) + \\ &= + \sum_{j=1}^3 Df_{3x}(w_j)\theta(w_j) \wedge \theta(w_3) = \\ &= Df_{1x}(w_2)\theta(w_2) \wedge \theta(w_1) + Df_{1x}(w_3)\theta(w_3) \wedge \theta(w_1) + \\ &= + Df_{2x}(w_1)\theta(w_1) \wedge \theta(w_2) + Df_{2x}(w_3)\theta(w_3) \wedge \theta(w_2) + \\ &= + Df_{3x}(w_1)\theta(w_1) \wedge \theta(w_3) + Df_{3x}(w_2)\theta(w_2) \wedge \theta(w_3) = \\ &= (Df_{2x}(w_1) - Df_{1x}(w_2))\theta(w_1) \wedge \theta(w_2) - \\ &= - (Df_{1x}(w_3) - Df_{3x}(w_1))\theta(w_1) \wedge \theta(w_3) + \\ &= + (Df_{3x}(w_2) - Df_{2x}(w_3))\theta(w_2) \wedge \theta(w_3) \end{aligned}$$

e daqui resulta a conclusão pretendida tendo em conta a caracterização do rotacional em III.2.13 e o facto de se ter

$$\begin{aligned} *(\theta(w_1) \wedge \theta(w_2)) &= \text{sg}(\{1, 2\})\theta(w_3) = \theta(w_3), \\ *(\theta(w_1) \wedge \theta(w_3)) &= \text{sg}(\{1, 3\})\theta(w_2) = -\theta(w_2), \\ *(\theta(w_2) \wedge \theta(w_3)) &= \text{sg}(\{2, 3\})\theta(w_1) = \theta(w_1). \square \end{aligned}$$

§3. Derivada de Lie duma forma diferencial.

III.3.1. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} . Existe então um, e um só, campo tensorial $\mathcal{L}_X(\xi)$, de grau p e com valores em \mathbb{K} , a que se dá o nome de *derivada de Lie* de ξ na direcção de X , tal que, qualquer que seja a aplicação suave $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_x)_{x \in M}$, de M em $L^p(E; \mathbb{K})$, com cada $\bar{\xi}_x$ restrição de ξ_x , se tenha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\xi)_x(u_1, \dots, u_p) &= D\bar{\xi}_x(X_x)(u_1, \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \bar{\xi}_x(u_1, \dots, u_{j-1}, DX_x(u_j), u_{j+1}, \dots, u_p). \end{aligned}$$

Além disso, se, para cada $1 \leq j \leq p$, $X_j = (X_{j_x})_{x \in M}$ é um campo vectorial suave sobre M , tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\xi)(X_1, \dots, X_p) &= D(\xi(X_1, \dots, X_p))(X) - \\ &- \sum_{j=1}^p \xi(X_1, \dots, X_{j-1}, [X, X_j], X_{j+1}, \dots, X_p). \end{aligned}$$

Dem: A demonstração tem o mesmo espírito que a de III.2.2. Começamos por notar que a unicidade de um campo tensorial $\mathcal{L}_X(\xi)$, verificando a condição do enunciado, resulta da existência de pelo menos uma aplicação suave $\bar{\xi}$, de M em $L^p(E; \mathbb{K})$, tal que cada ξ_x seja uma restrição de $\bar{\xi}_x$. Suponhamos agora que $x_0 \in M$ e que $u_1, \dots, u_p \in T_{x_0}(M)$. Podemos então considerar, tal como na demonstração referida, campos vectoriais suaves X_1, \dots, X_p , com $X_{j_{x_0}} = u_j$ e vamos mostrar que, quaisquer que sejam os X_j nestas condições, e qualquer que seja a aplicação suave $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_x)_{x \in M}$, de M em $L^p(E; \mathbb{K})$, com cada ξ_x restrição de $\bar{\xi}_x$, tem-se

$$\begin{aligned} D\bar{\xi}_{x_0}(X_{x_0})(u_1, \dots, u_p) &+ \sum_{j=1}^p \bar{\xi}_{x_0}(u_1, \dots, DX_{x_0}(u_j), \dots, u_p) = \\ &= D(\xi(X_1, \dots, X_p))_{x_0}(X_{x_0}) - \sum_{j=1}^p \xi_{x_0}(u_1, \dots, [X, X_j]_{x_0}, \dots, u_p); \end{aligned}$$

Se o fizermos, ficará provado que o segundo membro da primeira igualdade do enunciado não depende da escolha de $\bar{\xi}$, o que nos dá um elemento bem definido $\mathcal{L}_X(\xi)_{x_0} \in L^p(T_{x_0}(M); \mathbb{K})$, e ao mesmo tempo ficará demonstrada a segunda igualdade do enunciado. Ora, vem

$$\begin{aligned} D(\xi(X_1, \dots, X_p))_{x_0}(X_{x_0}) &= D(\bar{\xi}(X_1, \dots, X_p))_{x_0}(X_{x_0}) = \\ &= D\bar{\xi}_{x_0}(X_{x_0})(u_1, \dots, u_p) + \sum_{j=1}^p \bar{\xi}_{x_0}(u_1, \dots, DX_{j_{x_0}}(X_{x_0}), \dots, u_p) = \\ &= D\bar{\xi}_{x_0}(X_{x_0})(u_1, \dots, u_p) + \sum_{j=1}^p \bar{\xi}_{x_0}(u_1, \dots, DX_{j_{x_0}}(X_{x_0}) - DX_{x_0}(X_{j_{x_0}}), \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \bar{\xi}_{x_0}(u_1, \dots, DX_{x_0}(u_j), \dots, u_p) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= D\bar{\xi}_{x_0}(X_{x_0})(u_1, \dots, u_p) + \sum_{j=1}^p \xi_{x_0}(u_1, \dots, [X, X_j]_{x_0}, \dots, u_p) + \\
&+ \sum_{j=1}^p \bar{\xi}_{x_0}(u_1, \dots, DX_{x_0}(u_j), \dots, u_p),
\end{aligned}$$

o que termina a demonstração. \square

III.3.2. Tal como se disse em III.1.4, há duas situações em que, nas condições anteriores, o prolongamento $\bar{\xi}$ é único, e coincide com o próprio ξ :

a) A primeira situação é aquela em que $p = 0$; o campo tensorial de grau 0 é simplesmente uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ e a identidade que nos serviu para definir $\mathcal{L}_X(\xi)$ escreve-se simplesmente

$$\mathcal{L}_X(f)_x = Df_x(X_x),$$

por outras palavras, a derivada de Lie de f na direcção de X não é mais do que a derivada usual de f , aplicada a X .

b) A segunda situação é aquela em que, para cada $x \in M$, $T_x(M) = E$; é o que acontece no caso em que M é um aberto de E ou, mais geralmente, uma variedade, possivelmente com bordo, com dimensão em cada ponto igual à de E . Nesse caso a fórmula de definição escreve-se simplesmente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\xi)(u_1, \dots, u_p) &= D\xi_x(X_x)(u_1, \dots, u_p) + \\
&+ \sum_{j=1}^p \xi_x(u_1, \dots, u_{j-1}, DX_x(u_j), u_{j+1}, \dots, u_p).
\end{aligned}$$

III.3.3. **(Lema)** Sejam $M \subset E$ uma variedade, $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} , e $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave. Existe então um aberto U de E , com $M \subset U$, um campo tensorial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} , $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_x)_{x \in U}$, e um campo vectorial suave, $\tilde{X} = (\tilde{X}_x)_{x \in U}$, tais que $\xi = \tilde{\xi}|_M$ (restrição enquanto campo tensorial, cf. III.1.12) e $X = \tilde{X}|_M$. Além disso, quaisquer que sejam $\tilde{\xi}$ e \tilde{X} nestas condições, tem-se que $\mathcal{L}_X(\xi) = \mathcal{L}_{\tilde{X}}(\tilde{\xi})|_M$.

Dem: A justificação, que é trivial, é a mesma que a dada para o resultado correspondente, para a derivação exterior, III.2.4. \square

O lema anterior permite reduzir de forma trivial a demonstração de várias propriedades da derivação de Lie ao caso em que os campos tensoriais e os campos vectoriais estão definidos num aberto de E , quadro em que é desnecessário considerar prolongamentos para estes. Como primeiro exemplo, temos:

III.3.4. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} , e $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave.

Tem-se então que a derivada de Lie $\mathcal{L}_X(\xi)$ é um campo tensorial suave.

Dem: Tendo em conta o resultado anterior, basta fazer a demonstração no caso particular em que M é um aberto de E . Nesse caso, temos uma aplicação suave $D\xi: M \rightarrow L(E; L^p(E; \mathbb{K}))$ pelo que $D\xi(X)$ é uma aplicação suave de M em $L^p(E; \mathbb{K})$, e ficamos reduzidos a provar que, para cada j , é suave a aplicação de M em $L^p(E; \mathbb{K})$, que a cada $x \in M$ associa a aplicação multilinear definida por $(u_1, \dots, u_p) \mapsto \xi_x(u_1, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_p)$. Ora, isso é uma consequência da suavidade das aplicações de M em $L^p(E; \mathbb{K})$ e em $L(E; E)$, que a x associam ξ_x e DX_x , respectivamente, se repararmos que tem lugar uma aplicação bilinear de $L^p(E; \mathbb{K}) \times L(E; E)$ em $L^p(E; \mathbb{K})$, que a (η, λ) associa a aplicação multilinear definida por

$$(u_1, \dots, u_p) \mapsto \eta(u_1, \dots, \lambda(u_j), \dots, u_p). \square$$

III.3.5. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ e $Y = (Y_x)_{x \in M}$ dois campos vectoriais suaves, $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ e $\eta = (\eta_x)_{x \in M}$ dois campos tensoriais suaves de grau p , com valores em \mathbb{K} , $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{K}$. Tem-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X+Y}(\xi) &= \mathcal{L}_X(\xi) + \mathcal{L}_Y(\xi), & \mathcal{L}_{aX}(\xi) &= a\mathcal{L}_X(\xi), \\ \mathcal{L}_X(\xi + \eta) &= \mathcal{L}_X(\xi) + \mathcal{L}_X(\eta), & \mathcal{L}_X(b\xi) &= b\mathcal{L}_X(\xi). \end{aligned}$$

Dem: Trata-se de uma consequência imediata da definição. \square

Se em III.3.5 substituirmos as constantes a e b por funções suaves, obtemos o seguinte resultado:

III.3.6. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} . Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: M \rightarrow \mathbb{K}$ duas aplicações suaves. Tem-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX}(\xi)_x(u_1, \dots, u_p) &= f(x) \mathcal{L}_X(\xi)_x(u_1, \dots, u_p) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^p Df_x(u_j) \xi_x(u_1, \dots, u_{j-1}, X_x, u_{j+1}, \dots, u_p), \\ \mathcal{L}_X(g\xi)_x(u_1, \dots, u_p) &= g(x) \mathcal{L}_X(\xi)_x(u_1, \dots, u_p) + Dg_x(X_x) \xi_x(u_1, \dots, u_p). \end{aligned}$$

Dem: Reduzindo-nos, como anteriormente, ao caso particular em que M é um aberto de E , temos em ambos os casos de uma consequência imediata da definição, por aplicação da regra de Leibnitz para a derivação de um produto. \square

A segunda fórmula no resultado anterior pode ser generalizada numa fórmula para a derivada de Lie de um produto tensorial de campos tensoriais:

III.3.7. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ e $\eta = (\eta_x)_{x \in M}$ dois campos vectoriais suaves de graus p e q , com valores em \mathbb{K} . Tem-se então

$$\mathcal{L}_X(\xi \otimes \eta) = \mathcal{L}_X(\xi) \otimes \eta + \xi \otimes \mathcal{L}_X(\eta).$$

Dem: Como anteriormente, basta considerarmos o caso particular em que M é um aberto de E . Tem-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\xi \otimes \eta)_x(u_1, \dots, u_{p+q}) &= D(\xi \otimes \eta)_x(X_x)(u_1, \dots, u_{p+q}) + \\ &+ \sum_{j=1}^{p+q} \xi_x \otimes \eta_x(u_1, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_{p+q}) = \\ &= D\xi_x(X_x) \otimes \eta_x(u_1, \dots, u_{p+q}) + \xi_x \otimes D\eta_x(X_x)(u_1, \dots, u_{p+q}) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \xi_x(u_1, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_p) \eta_x(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}) + \\ &+ \sum_{j=p+1}^{p+q} \xi_x(u_1, \dots, u_p) \eta_x(u_{p+1}, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_{p+q}) = \\ &= D\xi_x(X_x)(u_1, \dots, u_p) \eta_x(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}) + \\ &+ \xi_x(u_1, \dots, u_p) D\eta_x(X_x)(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \xi_x(u_1, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_p) \eta_x(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}) + \\ &+ \sum_{j=p+1}^{p+q} \xi_x(u_1, \dots, u_p) \eta_x(u_{p+1}, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_{p+q}) = \\ &= \mathcal{L}_X(\xi)_x(u_1, \dots, u_p) \eta_x(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}) + \\ &+ \xi_x(u_1, \dots, u_p) \mathcal{L}_X(\eta)_x(u_{p+1}, \dots, u_{p+q}) = \\ &= (\mathcal{L}_X(\xi)_x \otimes \eta_x + \xi_x \otimes \mathcal{L}_X(\eta)_x)(u_1, \dots, u_{p+q}), \end{aligned}$$

donde o resultado. \square

III.3.8. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} . Tem-se então:

a) Para cada permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, $\mathcal{L}_X(\widehat{\sigma}(\xi)) = \widehat{\sigma}(\mathcal{L}_X(\xi))$;

b) $\mathcal{L}_X(\text{Alt}(\xi)) = \text{Alt}(\mathcal{L}_X(\xi))$;

c) Em particular, se ξ é uma forma diferencial de grau p , com valores em \mathbb{K} , também $\mathcal{L}_X(\xi)$ é uma forma diferencial.

Dem: Como anteriormente, basta considerarmos o caso particular em que M é um aberto de E . Notando $v_j = u_{\sigma(j)}$, vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\widehat{\sigma}(\xi))_x(u_1, \dots, u_p) &= D\widehat{\sigma}(\xi)_x(X_x)(u_1, \dots, u_p) + \\
&+ \sum_{j=1}^p \widehat{\sigma}(\xi_x)(u_1, \dots, u_{j-1}, DX_x(u_j), u_{j+1}, \dots, u_p) = \\
&= D(\widehat{\sigma}(\xi)(u_1, \dots, u_p))_x(X_x) + \\
&+ \sum_{j=1}^p \xi_x(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma^{-1}(j)-1}, DX_x(u_{\sigma^{-1}(j)}), u_{\sigma^{-1}(j)+1}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \\
&= D\xi(v_1, \dots, v_p)_x(X_x) + \\
&+ \sum_{j=1}^p \xi_x(v_1, \dots, v_{\sigma^{-1}(j)-1}, DX_x(v_{\sigma^{-1}(j)}), v_{\sigma^{-1}(j)+1}, \dots, v_p) = \\
&= D\xi(v_1, \dots, v_p)_x(X_x) + \\
&+ \sum_{k=1}^p \xi_x(v_1, \dots, v_k, DX_x(v_k), v_{k+1}, \dots, v_p) = \\
&= \mathcal{L}_X(\xi)_x(v_1, \dots, v_p) = \widehat{\sigma}(\mathcal{L}_X(\xi)_x)(u_1, \dots, u_p),
\end{aligned}$$

o que prova a). A alínea b) resulta de a), tendo em conta a definição do operador Alt de antissimetrização, e a alínea c) é uma consequência simples de b). \square

III.3.9. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ e $\rho = (\rho_x)_{x \in M}$ duas formas diferenciais suaves de grau p , com valores em \mathbb{K} . Tem-se então

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \rho) = \mathcal{L}_X(\omega) \wedge \rho + \omega \wedge \mathcal{L}_X(\rho).$$

Dem: Trata-se de uma consequência de III.3.7 e da alínea b) de III.3.9, tendo em conta a fórmula

$$\omega \wedge \rho = \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{Alt}(\omega \wedge \rho). \square$$

III.3.10. Sejam $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ duas variedades e $f: \widehat{M} \rightarrow M$ uma aplicação suave. Sejam $X = (X_x)_{x \in \widehat{M}}$ e $Y = (Y_y)_{y \in M}$ dois campos vectoriais suaves f -relacionados, isto é, tais que, para cada $x \in \widehat{M}$, $Y_{f(x)} = Df_x(X_x)$. Para cada campo tensorial suave de grau p , $\xi = (\xi_y)_{y \in M}$, com valores em \mathbb{K} , tem-se então

$$f^* \mathcal{L}_Y(\xi) = \mathcal{L}_X(f^* \xi).$$

Dem: Seja $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_y)_{y \in M}$ uma aplicação suave de M em $L^p(E; \mathbb{K})$ tal que cada ξ_y seja uma restrição de $\bar{\xi}_y$. Sejam U um aberto de \widehat{E} , contendo \widehat{M} , e $\bar{f}: U \rightarrow E$ um prolongamento suave de f . Uma vez que tem lugar uma aplicação suave de \widehat{M} em $L(\widehat{E}; E)$, que a x associa $D\bar{f}_x$, podemos

considerar uma aplicação suave de \widehat{M} em $L^p(\widehat{E}; \mathbb{K})$,

$$\overline{f^* \xi} = (D\overline{f}_x^* \overline{\xi}_{f(x)})_{x \in \widehat{M}} = (\overline{\xi}_{f(x)} \circ (D\overline{f}_x \times \cdots \times D\overline{f}_x))_{x \in \widehat{M}},$$

tendo-se, é claro, que cada $(f^* \xi)_x = Df_x^*(\xi_{f(x)})$ é uma restrição de $(\overline{f^* \xi})_x$. Podemos portanto escrever, tendo em conta a fórmula

$$(\overline{f^* \xi})_x(u_1, \dots, u_p) = \overline{\xi}_{f(x)}(D\overline{f}_x(u_1), \dots, D\overline{f}_x(u_p)),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f^* \xi)_x(u_1, \dots, u_p) &= D(\overline{f^* \xi})_x(X_x)(u_1, \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{j=1}^p (\overline{f^* \xi})_x(u_1, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_p) = \\ &= D\overline{\xi}_{f(x)}(Df_x(X_x))(Df_x(u_1), \dots, Df_x(u_p)) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \overline{\xi}_{f(x)}(D\overline{f}_x(u_1), \dots, D^2\overline{f}_x(X_x, u_j), \dots, D\overline{f}_x(u_p)) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \overline{\xi}_{f(x)}(D\overline{f}_x(u_1), \dots, D\overline{f}_x(DX_x(u_j)), \dots, D\overline{f}_x(u_p)). \end{aligned}$$

Uma vez que $Y_{f(x)} = Df_x(X_x) = D\overline{f}_x(X_x)$, e portanto, por derivação de ambos os membros,

$$DY_{f(x)}(Df_x(u_j)) = D^2\overline{f}_x(u_j, X_x) + D\overline{f}_x(DX_x(u_j)),$$

obtemos, a partir da fórmula anterior, e tendo em conta a simetria da aplicação bilinear $D^2\overline{f}_x$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f^* \xi)_x(u_1, \dots, u_p) &= D\overline{\xi}_{f(x)}(Y_{f(x)})(Df_x(u_1), \dots, Df_x(u_p)) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \overline{\xi}_{f(x)}(Df_x(u_1), \dots, DY_{f(x)}(Df_x(u_j)), \dots, Df_x(u_p)) = \\ &= \mathcal{L}_Y(\xi)_{f(x)}(Df_x(u_1), \dots, Df_x(u_p)) = (f^* \mathcal{L}_Y(\xi))_x(u_1, \dots, u_p), \end{aligned}$$

o que termina a demonstração. \square

A propriedade que apresentamos em seguida estuda o que se passa quando aplicamos sucessivamente dois operadores de derivação de Lie.

III.3.11. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $X = (X_x)_{x \in M}$ e $Y = (Y_x)_{x \in M}$ dois campos vectoriais suaves. Se $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ é um campo tensorial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} , tem-se

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(\xi)) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(\xi)) = \mathcal{L}_{[X, Y]}(\xi).$$

Dem: Tendo em conta o lema III.3.3, podemos já supor que M é um aberto de E . Tem-se então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y(\xi)(u_1, \dots, u_p) &= D\xi(Y)(u_1, \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \xi(u_1, \dots, DY(u_j), \dots, u_p),\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(\xi))(u_1, \dots, u_p) &= D(\mathcal{L}_Y(\xi)(u_1, \dots, u_p))(X) + \\ &+ \sum_{k=1}^p \mathcal{L}_Y(\xi)(u_1, \dots, DX(u_k), \dots, u_p) = \\ &= D^2\xi(X, Y)(u_1, \dots, u_p) + D\xi(DY(X))(u_1, \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{j=1}^p D\xi(X)(u_1, \dots, DY(u_j), \dots, u_p) + \xi(u_1, \dots, D^2Y(X, u_j), \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{k=1}^p D\xi(Y)(u_1, \dots, DX(u_k), \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{j < k} \xi(u_1, \dots, DY(u_j), \dots, DX(u_k), \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{k=1}^p \xi(u_1, \dots, DY(DX(u_k)), \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{j > k} \xi(u_1, \dots, DX(u_k), \dots, DY(u_j), \dots, u_p).\end{aligned}$$

Trocando X com Y na fórmula anterior e subtraindo daquela a fórmula assim obtida, vem, tendo em conta a simetria da aplicação bilinear $D^2\xi$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(\xi))(u_1, \dots, u_p) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(\xi))(u_1, \dots, u_p) &= \\ &= D\xi(DY(X) - DX(Y))(u_1, \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{j=1}^p \xi(u_1, \dots, D^2Y(X, u_j) - D^2X(Y, u_j), \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{k=1}^p \xi(u_1, \dots, DY(DX(u_k)) - DX(DY(u_k)), \dots, u_p) = \\ &= D\xi([X, Y])(u_1, \dots, u_p) + \\ &+ \sum_{k=1}^p \xi(u_1, \dots, D^2Y(X, u_j) - D^2X(Y, u_j) + DY(DX(u_j)) - DX(DY(u_j)), \dots, u_p).\end{aligned}$$

Mas, por derivação de ambos os membros da identidade

$$[X, Y] = DY(X) - DX(Y),$$

obtemos

$$D[X, Y](u_j) = D^2Y(u_j, X) + DY(DX(u_j)) - D^2X(u_j, Y) - DX(DY(u_j)),$$

o que, substituído na última fórmula e tendo em conta a simetria das aplicações bilineares D^2X e D^2Y , dá

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(\xi))(u_1, \dots, u_p) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(\xi))(u_1, \dots, u_p) = \\ & = D\xi([X, Y])(u_1, \dots, u_p) + \sum_{j=1}^p \xi(u_1, \dots, D[X, Y](u_j), \dots, u_p) = \\ & = \mathcal{L}_{[X, Y]}(\xi)(u_1, \dots, u_p). \square \end{aligned}$$

III.3.12. (Corolário) Em particular, tomando para ξ um campo tensorial de grau 0, vemos que, se $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação suave, então

$$Df([X, Y]) = D(Df(Y))(X) = D(Df(X))(Y).$$

É clássico utilizar a notação $X \cdot f$ para $Df(X)$, pelo que a fórmula anterior é então escrita do seguinte modo:

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f).$$

III.3.13. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial suave de grau $p \geq 1$ e com valores em \mathbb{K} . Tem então lugar um campo tensorial suave de grau $p - 1$

$$\text{int}_X(\xi) = (\text{int}_{X_x}(\xi_x))_{x \in M},$$

onde $\text{int}_{X_x}(\xi_x)(u_1, \dots, u_{p-1}) = \xi_x(X_x, u_1, \dots, u_{p-1})$.

Dem: Seja $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_x)_{x \in M}$ uma aplicação suave de M em $L^p(E; \mathbb{K})$, tal que cada ξ_x seja uma restrição de $\bar{\xi}_x$. Considerando a aplicação bilinear de $L^p(E; \mathbb{K}) \times E$ em $L^{p-1}(E; \mathbb{K})$, que a (λ, w) associa $\text{int}_w(\lambda)$, vemos que vai ter lugar uma aplicação suave de M em $L^{p-1}(E; \mathbb{K})$, que a x associa $\text{int}_{X_x}(\bar{\xi}_x)$, sendo trivial que cada $\text{int}_{X_x}(\xi_x)$ é uma restrição de $\text{int}_{X_x}(\bar{\xi}_x)$. \square

III.3.14. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ e $Y = (Y_x)_{x \in M}$ campos vectoriais suaves e $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial suave de grau $p \geq 1$ e com valores em \mathbb{K} . Tem-se então

$$\mathcal{L}_X(\text{int}_Y(\xi)) - \text{int}_Y(\mathcal{L}_X(\xi)) = \text{int}_{[X, Y]}(\xi).$$

Dem: Como usualmente, podemos já supor que M é um aberto de E . Uma vez que

$$(\text{int}_Y(\xi))_x(u_1, \dots, u_{p-1}) = \xi_x(Y_x, u_1, \dots, u_{p-1}),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\text{int}_Y(\xi))_x(u_1, \dots, u_{p-1}) &= D(\text{int}_Y(\xi)(u_1, \dots, u_{p-1}))_x(X_x) + \\
&+ \sum_{j=1}^{p-1} \text{int}_Y(\xi)_x(u_1, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_{p-1}) = \\
&= D\xi_x(X_x)(Y_x, u_1, \dots, u_{p-1}) + \xi_x(DY_x(X_x), u_1, \dots, u_{p-1}) + \\
&+ \sum_{j=1}^{p-1} \xi_x(Y_x, u_1, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_{p-1}) = \\
&= \xi_x(DY_x(X_x) - DX_x(Y_x), u_1, \dots, u_{p-1}) + D\xi_x(X_x)(Y_x, u_1, \dots, u_{p-1}) + \\
&+ \xi_x(DX_x(Y_x), u_1, \dots, u_{p-1}) + \sum_{j=1}^{p-1} \xi_x(Y_x, u_1, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_{p-1}) = \\
&= \xi_x([X, Y]_x, \dots, u_1, \dots, u_{p-1}) + \mathcal{L}_X(\xi)_x(Y_x, u_1, \dots, u_{p-1}) = \\
&= \text{int}_{[X, Y]_x}(\xi_x)(u_1, \dots, u_{p-1}) + \text{int}_{Y_x}(\mathcal{L}_X(\xi)_x)(u_1, \dots, u_{p-1}),
\end{aligned}$$

donde o resultado

Nos resultados anteriores a derivada de Lie foi aplicada a um campo tensorial suave arbitrário, que pode evidentemente ser, em particular, uma forma diferencial. Nos três resultados que se seguem, o primeiro dos quais é simplesmente uma reformulação de III.3.6, já é essencial termos uma forma diferencial.

III.3.15. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave, $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau $p \geq 1$ e com valores em \mathbb{K} e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave. Tem-se então

$$\mathcal{L}_{fX}(\omega) = f\mathcal{L}_X(\omega) + df \wedge \text{int}_X(\omega).$$

Dem: Tendo em conta a primeira fórmula de III.3.6, vem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fX}(\omega)_x(u_1, \dots, u_p) &= f(x) \mathcal{L}_X(\omega)_x(u_1, \dots, u_p) + \\
&+ \sum_{j=1}^p Df_x(u_j) \omega_x(u_1, \dots, u_{j-1}, X_x, u_{j+1}, \dots, u_p) = \\
&= f(x) \mathcal{L}_X(\omega)_x(u_1, \dots, u_p) + \\
&+ \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} Df_x(u_j) \text{int}_{X_x}(\omega_x)(u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_p) = \\
&= f(x) \mathcal{L}_X(\omega)_x(u_1, \dots, u_p) + df_x \wedge \text{int}_{X_x}(\omega_x)(u_1, \dots, u_p). \square
\end{aligned}$$

III.3.16. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau $p \geq 1$, com valores em \mathbb{K} . Tem-se então

$$\text{int}_X(d\omega) + d \text{int}_X(\omega) = \mathcal{L}_X(\omega).$$

Dem: Podemos já supor que M é um aberto de E . Tem-se então

$$\text{int}_X(\omega)_x(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_p) = \omega_x(X_x, u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_p),$$

pelo que

$$\begin{aligned} d \text{int}_X(\omega)_x(u_1, \dots, u_p) &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} D(\text{int}_X(\omega))_x(u_j)(u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_p) = \\ &= \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} (D\omega_x(u_j)(X_x, u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_p) + \omega_x(DX_x(u_j), u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_p)) = \\ &= -(d\omega)_x(X_x, u_1, \dots, u_p) + D\omega_x(X_x)(u_1, \dots, u_p) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \omega_x(u_1, \dots, DX_x(u_j), \dots, u_p) = \\ &= -\text{int}_X(d\omega)_x(u_1, \dots, u_p) + \mathcal{L}_X(\omega)_x(u_1, \dots, u_p), \end{aligned}$$

donde o resultado. \square

III.3.17. (**Nota**) No resultado anterior exigimos que o grau p da forma diferencial ω fosse maior ou igual a 1, sem o que $\text{int}_X(\omega)$ não fazia sentido. É no entanto imediato constatar que, no caso em que temos uma forma diferencial de grau 0, isto é, uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{K}$, tem-se

$$\text{int}_X(df) = \mathcal{L}_X(f),$$

pelo que tudo se passa como se o resultado anterior fosse ainda válido para as formas diferenciais de grau 0 desde que, para uma tal forma diferencial, se defina $\text{int}_X(\omega) = 0$.

III.3.18. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} . Tem-se então

$$d\mathcal{L}_X(\omega) = \mathcal{L}_X(d\omega) = d \text{int}_X(d\omega).$$

Dem: No caso em que $p \geq 1$, sai, tendo em conta III.3.16 e III.2.8,

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_X(\omega) &= d(\text{int}_X(d\omega) + d \text{int}_X(\omega)) = d \text{int}_X(d\omega) = \\ &= d \text{int}_X(d\omega) + \text{int}_X(dd\omega) = \mathcal{L}_X(d\omega). \end{aligned}$$

O caso $p = 0$ é análogo, tendo em conta a fórmula trivial referida na nota anterior,

$$d\mathcal{L}_X(f) = d \text{int}_X(df) = d \text{int}_X(df) + \text{int}_X(ddf) = \mathcal{L}_X(df). \square$$

§4. Integral duma forma diferencial.

III.4.1. Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de um produto interno, e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m , suavemente orientada²⁴. Seja $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau m , com valores em \mathbb{K} . Tem então lugar uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $f(x) = * \omega_x$ (cf. III.1.25), ou seja, por

$$\omega_x = f(x) Vol_x,$$

onde $Vol_x \in A^m(T_x(M); \mathbb{R})$ é o elemento de volume do espaço euclidiano orientado $T_x(M)$. Dizemos então que a forma diferencial ω é *integrável* se a aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ for integrável, relativamente à medida μ_M (associada a M como subvariedade do espaço euclidiano E), e, nesse caso, define-se o *integral* de ω , $\int_M \omega$ ou, simplesmente, $\int \omega$, como sendo o elemento de \mathbb{K}

$$\int_M \omega = \int_M f(x) d\mu_M(x).^{25}$$

Mais geralmente, se $A \subset M$ é um boreliano, diz-se que ω é integrável sobre A se a aplicação f for integrável sobre A e, nesse caso, define-se

$$\int_A \omega = \int_A f(x) d\mu_M(x).$$

III.4.2. Nas condições anteriores, se trocarmos a orientação de M , o elemento de volume vem multiplicado por -1 pelo que o facto de ω ser ou não integrável não muda e o integral de ω , quando esta forma diferencial for integrável, vem multiplicado por -1 .

III.4.3. Dadas as variedades de dimensão m , $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$, suavemente orientadas, diz-se que um difeomorfismo $\varphi: \widehat{M} \rightarrow M$ *conserva* (resp. *inverte*) as orientações se, para cada $x \in \widehat{M}$, o isomorfismo

$$D\varphi_x: T_x(\widehat{M}) \rightarrow T_{\varphi(x)}(M)$$

conserva (resp. inverte) as orientações.

²⁴Veremos adiante que esta definição não depende do produto interno que se considera em E , pelo que ela fará sentido no quadro de uma subvariedade suavemente orientada de um espaço vectorial de dimensão finita, não forçosamente dotado *a priori* de um produto interno.

²⁵Repare-se que só se define o integral de uma forma diferencial cujo grau seja igual à dimensão da variedade.

III.4.4. Sejam E e \widehat{E} espaços euclidianos, $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ duas variedades de dimensão m , suavemente orientadas, e $\varphi: \widehat{M} \rightarrow M$ um difeomorfismo que conserve as orientações ou inverta as orientações e notemos $\varepsilon = 1$ no primeiro caso e $\varepsilon = -1$ no segundo. Seja $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave com valores em \mathbb{K} . Tem-se então que a forma diferencial suave $\varphi^*\omega$ sobre \widehat{M} é integrável se, e só se, ω o for e, nesse caso,

$$\int_{\widehat{M}} \varphi^*\omega = \varepsilon \int_M \omega.$$

Mais geralmente, se $\widehat{A} \subset \widehat{M}$ é um boreliano e $A = \varphi(\widehat{A})$, $\varphi^*\omega$ é integrável sobre \widehat{A} se, e só se, ω for integrável sobre A e, nesse caso,

$$\int_{\widehat{A}} \varphi^*\omega = \varepsilon \int_A \omega.^{26}$$

Dem: Tendo em conta III.4.2, podemos já supor que o difeomorfismo φ conserva as orientações. Reparemos agora que, sendo $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ a aplicação suave definida por $\omega_y = f(y) \text{Vol}_y$, vai-se ter, tendo em conta II.8.7,

$$(\varphi^*\omega)_x = D\varphi_x^*(\omega_{\varphi(x)}) = f(\varphi(x)) D\varphi_x^*(\text{Vol}_{\varphi(x)}) = f(\varphi(x)) c_{D\varphi(x)} \text{Vol}_x.$$

Concluimos portanto que a aplicação de \widehat{M} em \mathbb{K} associada a $\varphi^*\omega$ está definida por $x \mapsto c_{D\varphi(x)} f(\varphi(x))$, sendo portanto uma aplicação suave que, de acordo com I.3.5, vai ser integrável, relativamente à medida $\mu_{\widehat{M}}$, se, e só se, isso acontecer a f , relativamente à medida μ_M , tendo-se, nesse caso,

$$\int_{\widehat{M}} \varphi^*\omega = \int_{\widehat{M}} f(\varphi(x)) c_{D\varphi(x)} d\mu_{\widehat{M}}(x) = \int_M f(y) d\mu_M(y) = \int_M \omega.$$

Tendo em conta o facto de o integral de uma função sobre um subconjunto boreliano ser igual ao integral sobre o espaço todo do produto desta pela função característica do boreliano, o argumento anterior implica também a afirmação sobre os integrais em subconjuntos borelianos. \square

III.4.5. (**Corolário**) Sejam E um espaço vectorial de dimensão finita, sobre o qual consideramos dois produtos internos, e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m suavemente orientada. Se $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ é uma forma diferencial suave de grau m , com valores em \mathbb{K} , ω é integrável relativamente a um dos produtos internos se, e só se, o for relativamente ao outro e então o integral é o mesmo nos dois casos. Podemos assim falar de formas diferenciais integráveis e do integral de uma tal forma diferencial mesmo no caso em que o espaço ambiente não está munido *a priori* de nenhum produto interno.

²⁶Doravante, e com o objectivo de não tornar os enunciados pesados, não enunciaremos explicitamente os resultados envolvendo os integrais de formas diferenciais sobre subconjuntos borelianos, quando for claro que estes são generalizações imediatas dos resultados correspondentes para os integrais sobre toda a variedade.

Dem: Basta aplicar o resultado anterior à aplicação identidade de M , considerando no domínio um dos produtos internos e no espaço de chegada o outro. \square

III.4.6. Seja $M \subset E$ uma variedade de dimensão m suavemente orientada. Dadas as formas diferenciais integráveis de grau m , reais ou complexas, $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ e $\sigma = (\sigma_x)_{x \in M}$ e o escalar $a \in \mathbb{K}$, tem-se que $\omega + \sigma$ e $a\omega$ são integráveis e

$$\int_M \omega + \sigma = \int_M \omega + \int_M \sigma, \quad \int_M a\omega = a \int_M \omega.$$

Dem: Trata-se de uma consequência imediata da correspondente propriedade para o integral de uma função relativamente a uma medida. \square

III.4.7. Seja $M \subset E$ uma variedade de dimensão m suavemente orientada. Seja $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau m , com valores em \mathbb{K} , e de *suporte compacto*, isto é, tal que exista um conjunto compacto $K \subset M$ tal que $\omega_x = 0$, para cada $x \notin K$. Tem-se então que ω é integrável.

Repare-se que a condição de a forma diferencial ω ter suporte compacto encontra-se trivialmente verificada sempre que a variedade M for compacta.

Dem: Sendo $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ a aplicação contínua definida por $f(x) = *\omega_x$, tem-se evidentemente que f é nula fora de K . Uma vez que a função contínua, que a x associa $|f(x)|$, admite um máximo b sobre K e que $\mu_M(K) < +\infty$, concluímos agora que

$$\int_M |f(x)| d\mu_M(x) = \int_K |f(x)| d\mu_M(x) \leq b \mu_M(K) < +\infty,$$

o que mostra que f , e portanto ω , é integrável. \square

§5. Teorema de Stokes.

Vamos começar por examinar o modo como uma orientação numa variedade induz uma orientação no seu bordo de índice 1.

III.5.1. Seja $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Para cada x no bordo de índice 1, $\partial_1(M)$, tem-se então que $T_x(\partial_1(M))$ é um hiperplano de $T_x(M)$ e os semi-espacos abertos correspondentes (cf. II.7.26) são o conjunto $T_x(M) \setminus \mathfrak{t}_x(M)$ dos vectores que são tangentes, mas não estritamente tangentes a M em x e o conjunto $\mathfrak{t}_x(M) \setminus T_x(\partial_1(M))$ dos vectores que são estritamente tangentes a M no ponto x , mas não são tangentes a $\partial_1(M)$ nesse ponto.

Dem: Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty[$, com $0 \in U$, V um aberto de

M , com $x \in V$, e $\varphi: U \rightarrow V$ um difeomorfismo com $\varphi(0) = x$. Tem-se então que a restrição de φ é um difeomorfismo de $U \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) = \partial_1(U)$ sobre $V \cap \partial_1(M) = \partial_1(V)$, pelo que $D\varphi_0$ vai ser um isomorfismo de \mathbb{R}^m sobre $T_x(M)$, aplicando $\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty[$ sobre $\mathfrak{t}_x(M)$ e $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ sobre $T_x(\partial_1(M))$. Uma vez que $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ é um hiperplano de \mathbb{R}^m , com os semi-espacos abertos $\mathbb{R}^{m-1} \times]0, +\infty[$ e $\mathbb{R}^{m-1} \times]-\infty, 0[$ (cf., por exemplo, II.7.27), concluímos imediatamente que $T_x(\partial_1(M))$ é um hiperplano de $T_x(M)$, tendo como semi-espacos abertos

$$\begin{aligned} D\varphi_0(\mathbb{R}^{m-1} \times]0, +\infty[) &= \mathfrak{t}_x(M) \setminus T_x(\partial_1(M)), \\ D\varphi_0(\mathbb{R}^{m-1} \times]-\infty, 0[) &= T_x(M) \setminus \mathfrak{t}_x(M). \square \end{aligned}$$

III.5.2. Nas condições anteriores, vamos chamar *orientação transversa canónica* de $T_x(\partial_1(M))$ em $T_x(M)$ (cf. II.7.26) aquela cujo semi-espaco positivo é $T_x(M) \setminus \mathfrak{t}_x(M)$ (o conjunto dos vectores tangentes que apontam para fora).

III.5.3. Seja $M \subset E$ uma variedade de dimensão m suavemente orientada. Chama-se então *orientação induzida* da variedade $\partial_1(M)$, de dimensão $m-1$, a definida pela condição de, para cada $x \in \partial_1(M)$, o hiperplano $T_x(\partial_1(M))$ de $T_x(M)$ ter a orientação induzida pela orientação de $T_x(M)$ e pela orientação transversa canónica de $T_x(\partial_1(M))$ em $T_x(M)$ (cf. II.7.28). Por outras palavras, para cada base w_1, \dots, w_{m-1} de $T_x(\partial_1(M))$ e cada vector $w \in T_x(M) \setminus \mathfrak{t}_x(M)$, a base w, w_1, \dots, w_{m-1} de $T_x(M)$ tem a mesma orientação que a base w_1, \dots, w_{m-1} de $T_x(\partial_1(M))$. É a orientação induzida a que se considera sempre, salvo aviso em contrário, sobre o bordo de índice 1 de uma variedade suavemente orientada.

III.5.4. Sejam $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ duas variedades de dimensão m suavemente orientadas e $\varphi: \widehat{M} \rightarrow M$ um difeomorfismo que conserva (resp. inverte) as orientações. Tem-se então que o difeomorfismo restrição, de $\partial_1(\widehat{M})$ sobre $\partial_1(M)$, também conserva (resp. inverte) as orientações.

Dem: Para cada $x \in \partial_1(\widehat{M})$ podemos fixar $w \in T_x(\widehat{M}) \setminus \mathfrak{t}_x(\widehat{M})$, tendo-se então $D\varphi_x(w) \in T_{\varphi(x)}(M) \setminus \mathfrak{t}_{\varphi(x)}(M)$; dada uma base w_1, \dots, w_{m-1} de $T_x(\partial_1(\widehat{M}))$, tem-se que

$$D(\varphi|_{\partial_1(\widehat{M})})_x: T_x(\partial_1(\widehat{M})) \rightarrow T_{\varphi(x)}(\partial_1(M))$$

conserva as orientações se, e só se, as bases w_1, \dots, w_{m-1} , de $T_x(\partial_1(\widehat{M}))$, e $D\varphi_x(w_1), \dots, D\varphi_x(w_{m-1})$, de $T_{\varphi(x)}(\partial_1(M))$, tiverem a mesma orientação, ou seja, se, e só se, as bases w, w_1, \dots, w_{m-1} , de $T_x(\widehat{M})$, e $D\varphi_x(w), D\varphi_x(w_1), \dots, D\varphi_x(w_{m-1})$, de $T_{\varphi(x)}(M)$, tiverem a mesma orientação, isto é, se, e só se, $D\varphi_x: T_x(\widehat{M}) \rightarrow T_{\varphi(x)}(M)$ conservar as orientações. \square

II.5.5 Seja $M \subset E$ uma variedade de dimensão m suavemente orientada. Tem-se então que a orientação induzida em $\partial_1(M)$ é também suave.

Dem: Seja $x_0 \in \partial_1(M)$ arbitrário. Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty[$, com $0 \in U$, V um aberto de M , com $x_0 \in V$, e $\varphi: U \rightarrow V$ um difeomorfismo com $\varphi(0) = x_0$. Tem-se então que a restrição de φ é um difeomorfismo de $U \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}) = \partial_1(U)$ sobre $V \cap \partial_1(M) = \partial_1(V)$, pelo que $D\varphi_0$ vai ser um isomorfismo de \mathbb{R}^m sobre $T_{x_0}(M)$, aplicando $\mathbb{R}^{m-1} \times [0, +\infty[$ sobre $t_{x_0}(M)$ e $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ sobre $T_{x_0}(\partial_1(M))$. Sendo e_1, \dots, e_m a base canónica de \mathbb{R}^m , tem-se que, para cada $y \in U \cap (\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\})$, $-e_m \in T_y(U) \setminus t_y(U)$, portanto

$$D\varphi_y(-e_m) \in T_{\varphi(y)}(M) \setminus t_{\varphi(y)}(M).$$

Podemos então considerar os campos vectoriais suaves sobre V , que a cada x associam $D\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(e_j)$, os quais vão constituir para cada x uma base de $T_x(M)$ pelo que, se necessário substituindo V por um aberto mais pequeno contendo ainda x_0 e φ por uma sua restrição, podemos já supor que, ou para todo o $x \in V$ a base

$$D\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(-e_m), D\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(e_1), \dots, D\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(e_{m-1})$$

de $T_x(M)$ é directa, ou para todo o $x \in V$ aquela base é retrógrada, o que implica que, ou para cada $x \in V \cap \partial_1(M)$ a base

$$D\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(e_1), \dots, D\varphi_{\varphi^{-1}(x)}(e_{m-1})$$

de $T_x(\partial_1(M))$ é directa, ou para cada $x \in V \cap \partial_1(M)$ aquela base é retrógrada. \square

Estamos agora em condições de enunciar, como lema, uma primeira versão particular do teorema de Stokes, em que a variedade considerada é um produto de intervalos.

III.5.6. (Lema) Sejam $m \geq 1$ e, para cada $1 \leq j \leq m$, $a_j < b_j$ dois reais e consideremos a variedade compacta de dimensão m ,

$$M = \prod_j [a_j, b_j],$$

sobre a qual se toma a orientação constante, correspondente à orientação canónica de \mathbb{R}^m (reparar que se tem $T_x(M) = \mathbb{R}^m$, para cada $x \in M$). Se $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ é uma forma diferencial suave de grau $m - 1$, com valores em \mathbb{K} , tem-se então que

$$\int_M d\omega = \int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)}.^{27}$$

Dem: Para cada $1 \leq j \leq m$, notemos

$$\begin{aligned} M_j &=]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_{j-1}, b_{j-1}[\times \{a_j\} \times]a_{j+1}, b_{j+1}[\times \cdots \times]a_m, b_m[, \\ M'_j &=]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_{j-1}, b_{j-1}[\times \{b_j\} \times]a_{j+1}, b_{j+1}[\times \cdots \times]a_m, b_m[, \end{aligned}$$

e reparemos que $\partial_1(M)$ é a união disjunta das subvariedades abertas M_j e M'_j . Notemos que num ponto de M_j o vector $-e_j$ é tangente mas não estritamente tangente a M e que num ponto de M'_j isso acontece ao vector e_j . Considerando o aberto A_j de \mathbb{R}^{m-1} , definido por

$$A_j =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_{j-1}, b_{j-1}[\times]a_{j+1}, b_{j+1}[\times \cdots \times]a_m, b_m[,$$

com a orientação canónica de \mathbb{R}^{m-1} , podemos considerar os difeomorfismos $\varphi_j: A_j \rightarrow M_j$ e $\varphi'_j: A_j \rightarrow M'_j$, definidos por

$$\begin{aligned} \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m) &= (x_1, \dots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \dots, x_m), \\ \varphi'_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_m) &= (x_1, \dots, x_{j-1}, b_j, x_{j+1}, \dots, x_m), \end{aligned}$$

e, reparando que tanto $D\varphi_j(x)$ como $D\varphi'_j(x)$ aplicam a base canónica de \mathbb{R}^{m-1} em $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_m$, constatamos, tendo em conta a definição da orientação induzida no bordo de índice 1 de M , que, se j é ímpar, φ_j inverte as orientações e φ'_j conserva as orientações e, se j é par, φ_j conserva as orientações e φ'_j inverte as orientações (para φ_j temos que ver o que acontece ao sinal da base $-e_j, e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_m$ e para φ'_j o que acontece ao sinal da base $e_j, e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_m$). Reparemos também que, para os elementos $\xi_{\wedge 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m}$ da base associada de $A^{m-1}(\mathbb{R}^m; \mathbb{K})$, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_j^*(\xi_{\wedge 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m}) &= \varphi_j^*(\xi_{\wedge 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m})(e_1, \dots, e_{m-1}) Vol_{\mathbb{R}^{m-1}} = \\ &= \xi_{\wedge 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m}(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_m) Vol_{\mathbb{R}^{m-1}} = \delta_{j,k} Vol_{\mathbb{R}^{m-1}} \end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\varphi_j'^*(\xi_{\wedge 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m}) = \delta_{j,k} Vol_{\mathbb{R}^{m-1}}.$$

Podemos agora escrever

²⁷Repare-se que a forma diferencial $d\omega$ é automaticamente integrável, por ser suave e M ser compacta, mas o mesmo não se poderia dizer *a priori* sobre a forma diferencial $\omega_{/\partial_1(M)}$, visto que a variedade $\partial_1(M)$ não é em geral compacta. O facto de esta última forma ser integrável é parte da conclusão do lema.

$$\omega_x = \sum_{k=1}^m f_k(x) \xi_{\wedge 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m},$$

onde as aplicações suaves $f_k: M \rightarrow \mathbb{K}$ estão definidas por

$$f_k(x) = \omega_x(e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_m),$$

e o que vimos atrás permite-nos então escrever

$$(\varphi_j^* \omega)_x = f_j(\varphi_j(x)) \text{Vol}_{\mathbb{R}^{m-1}}, \quad (\varphi_j'^* \omega)_x = f_j(\varphi_j'(x)) \text{Vol}_{\mathbb{R}^{m-1}}.$$

Por diferenciação exterior, obtemos

$$(d\omega)_x = \sum_{k=1}^m df_{kx} \wedge \xi_{\wedge 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m}.$$

Uma vez que

$$\xi_{\wedge 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m} = \theta(e_1) \wedge \dots \wedge \theta(e_{k-1}) \wedge \theta(e_{k+1}) \wedge \dots \wedge \theta(e_m)$$

e que

$$df_{kx} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \theta(e_j),$$

a fórmula precedente vai-nos dar

$$\begin{aligned} d\omega_x &= \sum_{k=1}^m df_{kx} \wedge \theta(e_1) \wedge \dots \wedge \theta(e_{k-1}) \wedge \theta(e_{k+1}) \wedge \dots \wedge \theta(e_m) = \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) \theta(e_k) \wedge \theta(e_1) \wedge \dots \wedge \theta(e_{k-1}) \wedge \theta(e_{k+1}) \wedge \dots \wedge \theta(e_m) = \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) \text{Vol}_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_M \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) dx = \\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \int_{A_k} \left(\int_{a_k}^{b_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) dx_k \right) d(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) = \\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \int_{A_k} f_k(x_1, \dots, b_k, \dots, x_m) - f_k(x_1, \dots, a_k, \dots, x_m) d(x_1, \dots, \widehat{x}_k, \dots, x_m) = \\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \int_{A_k} f_k \circ \varphi'_k(y) - f_k \circ \varphi_k(y) dy =^{28} \\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \left(\int_{A_k} \varphi'_k{}^*(\omega) - \int_{A_k} \varphi_k^*(\omega) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \left(\int_{M'_k} \omega_{/\partial_1(M)} + \int_{M_k} \omega_{/\partial_1(M)} \right) = \int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)}. \square
\end{aligned}$$

III.5.7. (Lema) Sejam $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ e $M \subset E$ duas variedades suavemente orientadas e $\varphi: \widehat{M} \rightarrow M$ um difeomorfismo. Para cada $x_0 \in \widehat{M}$, existe então um aberto \widehat{U} de \widehat{M} , com $x_0 \in \widehat{U}$, tal que a restrição de φ a \widehat{U} seja um difeomorfismo que ou conserva ou inverte as orientações.

Dem: Seja \widehat{U} um aberto de \widehat{M} , contendo x_0 , tal que exista um campo de referenciais suave de $T(\widehat{M})|_{\widehat{U}}$, isto é, que existam campos vectoriais X_1, \dots, X_m sobre \widehat{U} tais que, para cada $x \in \widehat{U}$, X_{1x}, \dots, X_{mx} seja uma base de $T_x(\widehat{M})$. A suavidade da orientação de \widehat{M} implica que, se necessário substituindo \widehat{U} por um aberto mais pequeno, contendo ainda x_0 , pode-se já supor que ou aquelas bases são todas directas ou elas são todas retrógradas. Sendo $U = \varphi(\widehat{U})$, que é um aberto de M contendo $\varphi(x_0)$, podemos considerar os campos vectoriais suaves Y_1, \dots, Y_m sobre U , definidos por

$$Y_{jy} = D\varphi_{\varphi^{-1}(y)}(X_{j\varphi^{-1}(y)})$$

(considerar um prolongamento de φ a um aberto de \widehat{E} contendo \widehat{U}). A suavidade da orientação de M implica que, se necessário substituindo U por um aberto mais pequeno, ainda contendo $\varphi(x_0)$, \widehat{U} pela imagem recíproca deste aberto e φ pela sua restrição, pode-se já supor que as bases Y_{1y}, \dots, Y_{my} são ou todas directas ou todas retrógradas. É agora imediato que ou o difeomorfismo φ conserva as orientações ou ele inverte as orientações. \square

²⁸Nesta igualdade sabemos que a diferença de duas funções é integrável em A_k e estamos a afirmar que o integral dessa diferença é igual à diferença dos dois integrais. Este raciocínio poderia ser incorrecto se nada nos garantisse que cada uma das duas funções é integrável em A_k . Isso acontece, no entanto, visto que estas funções são restrições de funções contínuas sobre a aderência de A_k , que é compacta.

III.5.8. **(Teorema de Stokes)** Seja $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada, e seja $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau $m - 1$, com valores em \mathbb{K} e com suporte compacto. Tem-se então

$$\int_M d\omega = \int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)}.^{29}$$

Repare-se que a condição de a forma diferencial ω ter suporte compacto encontra-se automaticamente verificada no caso em que a variedade M é compacta.

Dem: Vamos demonstrar o resultado com hipóteses suplementares sucessivamente mais fracas, até chegar ao resultado geral.

a) Vamos começar por supor que M é um aberto de $\mathbb{R}_p^m = \mathbb{R}^{m-p} \times [0, +\infty[^p$, com a orientação correspondente à orientação canónica de \mathbb{R}^m . Seja $K \subset M$ um compacto fora do qual ω se anula e seja $\bar{\omega}$ o prolongamento de ω a \mathbb{R}_p^m que se anula fora de M . Este prolongamento é ainda suave por ter restrições suaves aos abertos M e $\mathbb{R}_p^m \setminus K$, cuja união é \mathbb{R}_p^m (a segunda restrição é identicamente nula). É claro que $d\bar{\omega}$ vai ser um prolongamento suave de $d\omega$, que se anula fora de K . Seja $b > 0$ tal que $K \subset]-b, b[^m$ e apliquemos o lema anterior ao produto cartesiano de intervalos $M' = [-b, b]^{m-p} \times [0, b]^p$, que contém K e está contido em \mathbb{R}_p^m . Reparando que $\bar{\omega}$ se anula nos pontos deste produto de intervalos em que pelo menos uma das coordenadas é b ou $-b$, obtemos agora

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_{\mathbb{R}_p^m} d\bar{\omega} = \int_{M'} d(\bar{\omega}_{/M'}) = \int_{\partial_1(M')} \bar{\omega}_{/\partial_1(M')} = \\ &= \int_{\partial_1(\mathbb{R}_p^m)} \bar{\omega}_{/\partial_1(\mathbb{R}_p^m)} = \int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)}. \end{aligned}$$

b) Vamos supor agora que, mais geralmente, a variedade M é tal que existe um aberto U de \mathbb{R}_p^m e um difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow M$ que ou conserva ou inverte as orientações. Uma vez que, se o teorema é válido para M com uma certa orientação, é-o trivialmente também para M com a outra orientação (a orientação induzida no bordo vem também trocada pelo que ambos os membros da igualdade vêm multiplicados por -1), podemos já supor que φ conserva as orientações. Obtemos agora, uma vez que o difeomorfismo $\varphi_{/\partial_1(U)}: \partial_1(U) \rightarrow \partial_1(M)$ também conserva as orientações,

²⁹Tal como anteriormente, o facto de a forma diferencial $d\omega$ sobre M ser integrável é uma consequência de ela ser suave e de suporte compacto. Já a restrição de ω a $\partial_1(M)$ não terá *a priori* suporte compacto (tê-lo-ia se a variedade M não tivesse cantos visto que nesse caso $\partial_1(M)$ era fechado em M). O facto de esta restrição ser integrável é parte do enunciado do teorema.

$$\begin{aligned}\int_M d\omega &= \int_U \varphi^*(d\omega) = \int_U d\varphi^*(\omega) = \int_{\partial_1(U)} (\varphi^*\omega)_{/\partial_1(U)} = \\ &= \int_{\partial_1(U)} (\varphi_{/\partial_1(U)})^*(\omega_{/\partial_1(M)}) = \int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)}.\end{aligned}$$

c) Vamos supor agora, ainda mais geralmente, que a variedade M é arbitrária, mas que a forma diferencial ω é tal que existe um compacto K , contido num aberto V de M que seja difeomorfo a um aberto de \mathbb{R}_p^m por um difeomorfismo que conserve ou inverta as orientações, tal que ω se anula fora de K . É claro que $d\omega$ ainda se anula fora de K pelo que podemos escrever

$$\int_M d\omega = \int_V d\omega_{/V} = \int_{\partial_1(V)} \omega_{/\partial_1(V)} = \int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)}.$$

d) Passemos por fim à demonstração no caso geral. Seja $K \subset M$ um compacto fora do qual ω se anula. Para cada $x \in K$, existe um aberto V_x de M contendo x que seja difeomorfo a um aberto de \mathbb{R}_p^m e, se necessário substituindo esse aberto por um aberto mais pequeno, pode-se já supor que o difeomorfismo em questão ou conserva ou inverte as orientações. Uma vez que o compacto K vai estar contido na união dos abertos V_x , vai existir uma parte finita J de K tal que K esteja contido na união dos conjuntos V_x , com $x \in J$. Pelo teorema da partição da unidade, podemos considerar aplicações suaves $\alpha_x: M \rightarrow [0, 1]$, onde $x \in J$, tais que cada α_x seja nula fora de uma parte C_x de V_x , fechada em M e que, para cada $y \in K$, $\sum_{x \in J} \alpha_x(y) = 1$

(considerar a cobertura aberta de M formada pelos V_x , com $x \in J$, e por $M \setminus K$ e deitar fora a função da partição da unidade correspondente a este último aberto). Sendo, para cada $x \in J$, $\omega_{(x)}$ a forma diferencial suave $\alpha_x \omega$, tem-se que $\omega_{(x)}$ é nula fora do compacto $K \cap C_x$ contido em V_x e vem, para cada $y \in M$, $\omega_y = \sum_{x \in J} \omega_{(x)y}$, visto que ambos os membros da igualdade são nulos se $y \notin K$ e, para $y \in K$, $\sum_{x \in J} \alpha_x(y) = 1$. Tem-se então $d\omega = \sum_{x \in J} d\omega_{(x)}$ pelo que escrevemos finalmente

$$\int_M d\omega = \sum_{x \in J} \int_M d\omega_{(x)} = \sum_{x \in J} \int_{\partial_1(M)} \omega_{(x)_{/\partial_1(M)}} = \int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)}. \square$$

III.5.9. (Corolário) Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada. Se $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ é uma forma diferencial suave de grau $m - 1$ com suporte compacto (condição que se encontra automaticamente verificada se a variedade M é compacta), então

$$\int_M d\omega = 0.$$

Note-se que a condição de a forma diferencial ω ter suporte compacto é essencial para a validade do teorema de Stokes. De facto, considerando uma variedade M e uma forma diferencial ω de suporte compacto tal que o integral da restrição de ω a $\partial_1(M)$ seja não nulo, é imediato que a igualdade do teorema de Stokes é falsa quando considerarmos como variedade $\partial_0(M)$ e como forma diferencial a restrição de ω (reparar que $\mu_M(M \setminus \partial_0(M)) = 0$).

§6. Versões clássicas do teorema de Stokes.

III.6.1. (**Lema**) Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $m \geq 1$ e seja $F \subset E$ um subespaço vectorial de dimensão $m - 1$, munido de uma orientação transversa e da orientação induzida (cf. II.7.28). Seja Vol_F o elemento de volume de F . Existe então um, e um só, vector $z \in E$, com norma 1, ortogonal a F e pertencente ao semi-espaço positivo, a que damos o nome de *normal unitária positiva*, e então, para cada $x \in E$,

$$(*\theta(x))_{/F} = \langle x, z \rangle Vol_F \in A^{m-1}(F; \mathbb{R}).$$

Dem: A existência e unicidade de z nas condições do enunciado vem de que o complementar ortogonal F^\perp de F em E tem dimensão 1, pelo que possui dois, e só dois, vectores de norma 1, um simétrico do outro, e destes um vai estar no semi-espaço positivo e outro no negativo. Seja w_1, \dots, w_{m-1} uma base ortonormada, por exemplo directa, de F . Tendo em conta a definição da orientação induzida, z, w_1, \dots, w_{m-1} é uma base ortonormada directa de E e vem

$$x = \langle x, z \rangle z + \sum_j \langle x, w_j \rangle w_j.$$

Obtemos agora, notando Vol_E o elemento de volume de E e tendo em conta a alínea a) de II.8.18,

$$\begin{aligned} *\theta(x)(w_1, \dots, w_{m-1}) &= Vol_E(x, w_1, \dots, w_{m-1}) = \\ &= \langle x, z \rangle Vol_E(z, w_1, \dots, w_{m-1}) + \sum_j \langle x, w_j \rangle Vol_E(w_j, w_1, \dots, w_{m-1}) = \\ &= \langle x, z \rangle, \end{aligned}$$

e portanto

$$(*\theta(x))_{/F} = *\theta(x)(w_1, \dots, w_{m-1}) Vol_F = \langle x, z \rangle Vol_F. \square$$

III.6.2. (Teorema da divergência) Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada³⁰. Seja $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave, nulo fora de uma certa parte compacta K de M . Para cada $x \in \partial_1(M)$, existe então um, e um só, vector $Z_x \in T_x(M) \setminus \mathfrak{t}_x(M)$, com norma 1 e ortogonal a $T_x(\partial_1(M))$, a que daremos o nome de *normal unitária exterior* e vem

$$\int_M \operatorname{div}(X)_x d\mu_M(x) = \int_{\partial_1(M)} \langle X_x, Z_x \rangle d\mu_{\partial_1(M)}(x),$$

em que as funções integrandas são suaves.³¹

Dem: A existência e unicidade de Z_x , nas condições do enunciado, é uma consequência do lema anterior e da caracterização do semi-espaço positivo para a orientação transversa. Seja $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ a forma diferencial real suave de grau $m - 1$, definida por $\omega_x = * \theta(X_x)$ forma essa que é evidentemente nula fora do compacto $K \subset M$. Aplicando o teorema de Stokes, podemos portanto escrever

$$\int_M d\omega = \int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)},$$

e o que vamos fazer é interpretar os dois membros desta igualdade em termos de integrais de funções para as medidas μ_M e $\mu_{\partial_1(M)}$. Em primeiro lugar, tendo em conta o lema anterior, tem-se, para cada x em $\partial_1(M)$,

$$\omega_{x/T_x(\partial_1(M))} = \langle X_x, Z_x \rangle Vol'_x,$$

onde Vol'_x é o elemento de volume de $T_x(\partial_1(M))$, pelo que a suavidade da forma diferencial $\omega_{/\partial_1(M)}$, de grau $m - 1$, garante a suavidade da aplicação de $\partial_1(M)$ em \mathbb{R} , que a x associa $\langle X_x, Z_x \rangle$ (cf. III.1.25), concluindo-se em seguida, por definição, que

$$\int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)} = \int_{\partial_1(M)} \langle X_x, Z_x \rangle d\mu_{\partial_1(M)}(x).$$

Por outro lado, pela definição da divergência em III.2.11, tem-se, notando Vol_x o elemento de volume de $T_x(M)$,

$$d\omega_x = * \operatorname{div}(X)_x = \operatorname{div}(X)_x Vol_x,$$

³⁰Pode-se demonstrar este resultado sem a hipótese de M estar suavemente orientada (cf. as observações feitas a seguir a III.2.11) mas não temos então um simples corolário do teorema de Stokes e somos obrigados a repetir parte da respectiva demonstração, nomeadamente o argumento de partição da unidade para passar do local para o global. Com o objectivo de manter a exposição mais simples, preferimos fazer aqui a exigência simplificadora.

³¹De facto, e embora isso não nos vá fazer falta, pode-se ver mesmo que é suave a aplicação de $\partial_1(M)$ em E , que a x associa Z_x .

donde, finalmente

$$\int_M d\omega = \int_M \operatorname{div}(X)_x d\mu_M(x). \square$$

III.6.3. (Teorema de Stokes clássico) Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão 3, suavemente orientada³². Seja $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave sobre M . Seja $M' \subset M$ uma variedade compacta de dimensão 2, suavemente orientada. Tem-se então:

a) Para cada $x \in M'$, existe um, e um só, vector $Z_x \in T_x(M)$, que seja ortogonal a $T_x(M')$, tenha norma 1 e pertença ao semi-espaço positivo, para a orientação transversa de $T_x(M')$ em $T_x(M)$ que induz em $T_x(M')$ a orientação dada (diremos que Z_x é a *normal unitária positiva*).

b) Para cada $x \in \partial_1(M')$, existe um, e um só, vector $W_x \in T_x(\partial_1(M'))$, que tenha norma 1 e constitua uma base directa para a orientação de $\partial_1(M')$ como bordo de M' (diremos que W_x é a *tangente unitária positiva*).

c) Tem-se

$$\int_{M'} \langle \operatorname{rot}(X_x), Z_x \rangle d\mu_{M'}(x) = \int_{\partial_1(M')} \langle X_x, W_x \rangle d\mu_{\partial_1(M')}(x),$$

onde as funções integrandas são aplicações suaves.³³

Dem: A existência e unicidade de Z_x nas condições de a) resulta de que o complementar ortogonal de $T_x(M')$ em $T_x(M)$ tem dimensão 1, pelo que tem dois, e só dois, vectores de norma 1, um simétrico do outro, e destes vai haver um, e um só, que seja positivo para a orientação transversa. Do mesmo modo, a existência e unicidade de W_x nas condições de b) resulta de que $T_x(\partial_1(M'))$ é um espaço vectorial de dimensão 1. Considerando a forma diferencial suave de grau 1, sobre M , $\theta(X)$, podemos aplicar o teorema de Stokes à sua restrição a M' , para concluir que se tem

$$\int_{M'} d\theta(X)_{/M'} = \int_{\partial_1(M')} \theta(X)_{/\partial_1(M')},$$

e tudo o que temos que fazer, tal como no resultado anterior, é interpretar ambos os membros desta igualdade em termos de integrais de funções relativamente às medidas $\mu_{M'}$ e $\mu_{\partial_1(M')}$. Pela definição do rotacional, em III.2.13, tem-se $d\theta(X) = *\theta(\operatorname{rot}(X))$ pelo que o lema III.6.1 garante que, para cada $x \in M'$,

$$(d\theta(X))_{x/T_x(M')} = \langle \operatorname{rot}(X)_x, Z_x \rangle \operatorname{Vol}_x,$$

³²No caso mais clássico, M é um aberto de \mathbb{R}^3 ou, mais geralmente, dum espaço euclidiano orientado de dimensão 3.

³³Tal como no resultado anterior, pode-se provar que são mesmo suaves as aplicações de M' em E e de $\partial_1(M')$ em E , que a x associam Z_x e W_x , respectivamente.

onde Vol_x é o elemento de volume de $T_x(M')$. Resulta daqui a suavidade da aplicação de M' em \mathbb{R} , que a x associa $\langle \text{rot}(X)_x, Z_x \rangle$, e a fórmula

$$\int_{M'} d\theta(X)_{/M'} = \int_{M'} \langle \text{rot}(X)_x, Z_x \rangle d\mu_{M'}(x).$$

Por outro lado, para cada $x \in \partial_1(M')$, o facto de W_x constituir uma base ortonormada directa de $T_x(\partial_1(M'))$ implica que a componente de $\theta(X_x)_{/T_x(\partial_1(M'))}$ no elemento de volume Vol'_x de $T_x(\partial_1(M'))$ é igual a $\theta(X_x)(W_x) = \langle X_x, W_x \rangle$, o que nos permite concluir a suavidade da aplicação de $\partial_1(M')$ em \mathbb{R} , que a x associa $\langle X_x, W_x \rangle$ assim como o facto de se ter

$$\int_{\partial_1(M')} \theta(X)_{/\partial_1(M')} = \int_{\partial_1(M')} \langle X_x, W_x \rangle d\mu_{\partial_1(M')}. \square$$

§7. Operador prismático e lema de Poincaré.

Um resultado clássico, sobre a derivação do integral paramétrico, diz-nos que, se J é um intervalo aberto de números reais, U um aberto num espaço vectorial de dimensão finita E , F um espaço vectorial de dimensão finita e $f: J \times U \rightarrow F$ uma aplicação de classe C^k , onde $k \geq 0$, então, para cada par de reais $a, b \in J$, tem lugar uma aplicação de classe C^k , $g: U \rightarrow F$, definida por

$$g(x) = \int_a^b f(t, x) dt,$$

e que, no caso em que $k \geq 1$,

$$Dg_x(u) = \int_a^b D_2f_{(t,x)}(u) dt.$$

Vamos necessitar de uma versão mais geral deste resultado, em que o aberto U é substituído por uma variedade e o intervalo J não é obrigatoriamente aberto.

III.7.1. Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $M \subset E$ uma variedade e $f: I \times M \rightarrow F$ uma aplicação de classe C^k . Dados $a, b \in I$, tem então lugar uma aplicação de classe C^k , $g: M \rightarrow F$, definida por

$$g(x) = \int_a^b f(t, x) dt,$$

e, no caso em que $k \geq 1$, tem-se, para cada $u \in T_x(M)$,

$$Dg_x(u) = \int_a^b D_2 f_{(t,x)}(u) dt.$$

Dem: Seja J um intervalo aberto de \mathbb{R} , contendo I e tal que I seja fechado em J ; basta tomarmos para extremidade esquerda de J a de I , no caso em que esta não pertence a I , e $-\infty$, caso contrário, e tomar para extremidade direita de J a de I , no caso em que esta não pertence a I , e $+\infty$, caso contrário. Seja U um aberto de E tal que a variedade M seja fechada em U (toda a variedade é localmente compacta e, portanto, localmente fechada em E). Tem-se então que $I \times M$ é fechado em $J \times U$ pelo que, pelo método da partição da unidade, podemos considerar um prolongamento de classe C^k de f , $\bar{f}: J \times U \rightarrow F$. Aplicando o resultado conhecido a \bar{f} , obtemos uma aplicação de classe C^k , $\bar{g}: U \rightarrow F$, definida por

$$\bar{g}(x) = \int_a^b \bar{f}(t, x) dt,$$

a qual é evidentemente um prolongamento de g e, no caso em que $k \geq 1$, tem-se, para cada $u \in T_x(M)$,

$$Dg_x(u) = D\bar{g}_x(u) = \int_a^b D_2 \bar{f}_{(t,x)}(u) dt = \int_a^b D_2 f_{(t,x)}(u) dt. \square$$

III.7.2. Sejam $M \subset E$ uma variedade, $p \geq 0$ e $\omega = (\omega_{(t,x)})_{(t,x) \in [0,1] \times M}$ uma forma diferencial suave de grau $p+1$, real ou complexa, sobre a variedade $[0, 1] \times M$. Tem então lugar uma forma diferencial suave de grau p sobre a variedade M , $P\omega = (P\omega_x)_{x \in M}$, definida por

$$P\omega_x(u_1, \dots, u_p) = \int_0^1 \omega_{(t,x)}((1, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_p)) dt.$$

Dem: Considerando o prolongamento euclidiano de ω , sabemos que existe uma aplicação suave $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_{(t,x)})_{(t,x) \in [0,1] \times M}$, de $[0, 1] \times M$ em $A^{p+1}(\mathbb{R} \times E; \mathbb{K})$, tal que cada $\omega_{(t,x)} \in A^{p+1}(\mathbb{R} \times T_x(M); \mathbb{K})$ seja uma restrição de $\bar{\omega}_{(t,x)}$. Pelo resultado precedente, vai ter lugar uma aplicação suave $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$, de M em $A^{p+1}(\mathbb{R} \times E; \mathbb{K})$, definida por

$$\xi_x = \int_0^1 \bar{\omega}_{(t,x)} dt,$$

e, por composição com as aplicações lineares

$$\text{int}_{(1,0)}: A^{p+1}(\mathbb{R} \times E; \mathbb{K}) \rightarrow A^p(\mathbb{R} \times E; \mathbb{K})$$

e

$$\iota^*: A^p(\mathbb{R} \times E; \mathbb{K}) \rightarrow A^p(E; \mathbb{K})$$

(onde $\iota: E \rightarrow \mathbb{R} \times E$ é a aplicação linear, $\iota(x) = (0, x)$), obtemos uma aplicação suave $\overline{P\omega}$, de M em $A^p(E; \mathbb{K})$, onde

$$\begin{aligned} \overline{P\omega}(u_1, \dots, u_p) &= \xi_x((1, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_p)) = \\ &= \int_0^1 \overline{\omega}_{(t,x)}((1, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_p)) dt. \end{aligned}$$

Vemos assim que cada $P\omega_x$ é uma restrição de $\overline{P\omega}_x$, o que mostra que $P\omega$ é uma forma diferencial suave. \square

III.7.3. À aplicação P , que, a cada forma diferencial suave ω , de grau $p+1$ sobre $[0, 1] \times M$, associa a forma diferencial suave $P\omega$, de grau p sobre M , costuma-se dar o nome de *operador prismático*, por analogia com um operador com o mesmo nome que é utilizado nas teorias da homologia e da cohomologia singular, e que joga aí um papel semelhante ao deste. Repare-se que, como é imediato, P é uma aplicação linear.

III.7.4. Nas condições de III.7.2, notemos $\varphi_0, \varphi_1: M \rightarrow [0, 1] \times M$ as aplicações suaves definidas por

$$\varphi_0(x) = (0, x), \quad \varphi_1(x) = (1, x).$$

Se $\omega = (\omega_{(t,x)})_{(t,x) \in [0,1] \times M}$ é uma forma diferencial suave de grau $p+1$ sobre $[0, 1] \times M$, real ou complexa, tem-se então

$$dP\omega + Pd\omega = \varphi_1^* \omega - \varphi_0^* \omega.$$

Se $\omega = (\omega_{(t,x)})_{(t,x) \in [0,1] \times M}$ é uma forma diferencial suave de grau 0 sobre $[0, 1] \times M$, real ou complexa, tem-se então

$$Pd\omega = \varphi_1^* \omega - \varphi_0^* \omega.$$

Dem: Começemos por tratar o caso em que a forma diferencial ω tem grau $p+1$, com $p \geq 0$. Seja $\overline{\omega} = (\overline{\omega}_{(t,x)})_{(t,x) \in [0,1] \times M}$ uma aplicação suave de $[0, 1] \times M$ em $A^{p+1}(\mathbb{R} \times E; \mathbb{K})$, tal que cada $\omega_{(t,x)}$ seja uma restrição de $\overline{\omega}_{(t,x)}$. Podemos então considerar, como na demonstração de III.7.2, uma aplicação suave $\overline{P\omega}$, de M em $A^p(E; \mathbb{K})$, definida por

$$\overline{P\omega}(u_1, \dots, u_p) = \int_0^1 \overline{\omega}_{(t,x)}((1, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_p)) dt,$$

tendo-se que cada $P\omega_x \in A^p(T_x(M); \mathbb{K})$ vai ser uma restrição de $\overline{P\omega}_x$. A definição do operador de derivação exterior permite-nos agora escrever

$$\begin{aligned}
(dP\omega)_x(u_1, \dots, u_{p+1}) &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} D(\overline{P\omega})_x(u_j)(u_1, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{p+1}) = \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \int_0^1 D_2\overline{\omega}_{(t,x)}(u_j)((1,0), (0, u_1), \dots, (\widehat{0}, u_j), \dots, (0, u_{p+1})) dt.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(Pd\omega)_x(u_1, \dots, u_{p+1}) &= \\
&= \int_0^1 (d\omega)_{(t,x)}((1,0), (0, u_1), \dots, (0, u_{p+1})) dt = \\
&= \int_0^1 D\overline{\omega}_{(t,x)}((1,0))((0, u_1), \dots, (0, u_{p+1})) dt + \\
&= + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j \int_0^1 D\overline{\omega}_{(t,x)}((0, u_j))((1,0), (0, u_1), \dots, (\widehat{0}, u_j), \dots, (0, u_{p+1})) dt
\end{aligned}$$

pelo que, somando as igualdades anteriores e atendendo a que $D_2\overline{\omega}_{(t,x)}(u_j) = D\overline{\omega}_{(t,x)}((0, u_j))$ e $D\overline{\omega}_{(t,x)}((1,0)) = \frac{\partial}{\partial t}\overline{\omega}_{(t,x)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
(dP\omega + Pd\omega)_x(u_1, \dots, u_{p+1}) &= \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\overline{\omega}_{(t,x)}((0, u_1), \dots, (0, u_{p+1})) dt = \\
&= \overline{\omega}_{(1,x)}((0, u_1), \dots, (0, u_{p+1})) - \overline{\omega}_{(0,x)}((0, u_1), \dots, (0, u_{p+1})) = \\
&= (\varphi_1^*\omega - \varphi_0^*\omega)_x(u_1, \dots, u_{p+1}),
\end{aligned}$$

o que termina a demonstração, para as formas de grau maior ou igual a 1. O caso em que ω é uma forma de grau 0, portanto uma aplicação de $[0, 1] \times M$ em \mathbb{K} , é do mesmo tipo, mas mais simples: Vem

$$\begin{aligned}
(Pd\omega)_x &= \int_0^1 d\omega_{(t,x)}((1,0)) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\omega_{(t,x)} dt = \\
&= \omega_{(1,x)} - \omega_{(0,x)} = (\varphi_1^*\omega - \varphi_0^*\omega)_x. \square
\end{aligned}$$

III.7.5. Sejam E e \widehat{E} espaços vectoriais de dimensão finita e $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades. Diz-se que duas aplicações suaves $f, g: \widehat{M} \rightarrow M$ são *suavemente homotópicas* se existir uma aplicação suave $H: [0, 1] \times \widehat{M} \rightarrow M$, tal que, para cada $x \in \widehat{M}$,

$$H(0, x) = f(x), \quad H(1, x) = g(x).$$

Diz-se então que H é uma *homotopia suave* de f para g .

III.7.6. Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades e $f, g: \widehat{M} \rightarrow M$ duas aplicações suaves, suavemente homotópicas. Seja $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p sobre M , que seja *fechada*, isto é, que verifique

$d\omega = 0$. Tem-se então, para as correspondentes imagens recíprocas sobre \widehat{M} :

a) Se $p = 0$, então $f^*\omega = g^*\omega$;

b) Se $p \geq 1$, então $g^*\omega - f^*\omega$ é uma forma diferencial *exacta* sobre \widehat{M} , isto é, existe uma forma diferencial suave de grau $p - 1$, $\sigma = (\sigma_x)_{x \in \widehat{M}}$, sobre \widehat{M} , tal que $g^*\omega - f^*\omega = d\sigma$.

Dem: Nas notações de III.7.4, sendo H uma homotopia suave de f para g , H é uma aplicação suave de $[0, 1] \times \widehat{M}$ em M , tal que $H \circ \varphi_0 = f$ e $H \circ \varphi_1 = g$. O facto de se ter $d\omega = 0$ implica que

$$PdH^*\omega = PH^*d\omega = 0.$$

Podemos aplicar agora III.7.4 para escrever, se $p = 0$,

$$g^*\omega - f^*\omega = \varphi_1^*H^*\omega - \varphi_0^*H^*\omega = PdH^*\omega = 0,$$

e, se $p \geq 1$,

$$g^*\omega - f^*\omega = \varphi_1^*H^*\omega - \varphi_0^*H^*\omega = PdH^*\omega + dPH^*\omega = d\sigma,$$

desde que se tome $\sigma = PH^*\omega$, que é uma forma diferencial suave de grau $p - 1$ sobre \widehat{M} . \square

III.7.7. Diz-se que uma variedade $M \subset E$ é *suavemente contráctil* se a aplicação identidade de M é suavemente homotópica a uma aplicação constante de M em M , isto é, se existem $x_0 \in M$ e uma aplicação suave $H: [0, 1] \times M \rightarrow M$ tais que, para cada $x \in M$,

$$H(0, x) = x, \quad H(1, x) = x_0.$$

III.7.8. Como exemplos de variedades suavemente contrácteis, temos:

a) Se $M \subset E$ é uma variedade estrelada relativamente a um dos seus pontos x_0 , então M é suavemente contráctil. Em particular, toda a variedade, que seja um conjunto convexo e não vazio, é suavemente contráctil.

b) Sendo $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades difeomorfas, então, se M é suavemente contráctil, \widehat{M} é também suavemente contráctil.

c) Se $M \subset E$ é uma variedade arbitrária, então cada ponto $x_0 \in M$ admite um sistema fundamental de vizinhanças abertas que são variedades suavemente contrácteis.

Dem: Para a), podemos considerar a aplicação suave $H: [0, 1] \times M \rightarrow M$, definida por

$$H(t, x) = (1 - t)x + tx_0,$$

que verifica $H(0, x) = x$ e $H(1, x) = x_0$.

Para provar b), seja $H: [0, 1] \times M \rightarrow M$ uma homotopia suave de Id_M para a aplicação constante de valor $x_0 \in M$ e seja $f: M \rightarrow \widehat{M}$ um difeomorfismo. Podemos então definir uma aplicação suave $\widehat{H}: [0, 1] \times \widehat{M} \rightarrow \widehat{M}$ por

$$\widehat{H}(t, y) = f(H(t, f^{-1}(y))),$$

aplicação que verifica $\widehat{H}(0, y) = y$ e $\widehat{H}(1, y) = f(x_0)$, pelo que \widehat{H} é uma homotopia suave de $Id_{\widehat{M}}$ para a aplicação constante de valor $f(x_0)$.

Relativamente a c), reparamos que o ponto x_0 admite um sistema fundamental de vizinhanças abertas, que são difeomorfas à intersecção de um sector de um espaço vectorial de dimensão finita com uma bola aberta de centro em 0 (relativamente a uma certa norma), bastando então reparar que uma tal intersecção é estrelada relativamente a 0 (aliás é mesmo convexa). \square

III.7.9. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave de grau p . Como referimos atrás, diz-se que ω é *fechada* se se tem $d\omega = 0$ e, no caso em que $p \geq 1$, diz-se que ω é *exacta* se existe uma forma diferencial suave $\sigma = (\sigma_x)_{x \in M}$, de grau $p - 1$, tal que $\omega = d\sigma$. A identidade $dd\sigma = 0$ mostra-nos que toda a forma diferencial exacta é fechada. O lema de Poincaré, que demonstramos em seguida, diz-nos que a recíproca é também verdadeira, no caso em que a variedade M é suavemente contráctil. Apresentamos a seguir um exemplo de uma situação em que essa recíproca não é verdadeira, o que nos dará, em particular, um exemplo de uma variedade que não é suavemente contráctil.

III.7.10. (**Lema de Poincaré**) Sejam $M \subset E$ uma variedade suavemente contráctil e $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ uma forma diferencial suave, de grau $p \geq 1$, verificando $d\omega = 0$. Existe então uma forma diferencial suave de grau $p - 1$, $\sigma = (\sigma_x)_{x \in M}$, tal que $\omega = d\sigma$.

Dem: Uma vez que a aplicação $Id_M: M \rightarrow M$ é suavemente homotópica a uma aplicação constante $f: M \rightarrow M$, vimos em III.7.6 que existe uma forma diferencial suave σ , de grau $p - 1$, tal que $f^*\omega - Id_M^*\omega = d\sigma$. O facto de se ter $p \geq 1$ e $Df_x = 0$, para cada $x \in M$, implica que

$$(f^*\omega)_x(u_1, \dots, u_p) = \omega_{f(x)}(Df_x(u_1), \dots, Df_x(u_p)) = 0,$$

portanto $f^*\omega = 0$. Uma vez que $Id_M^*\omega = \omega$, a igualdade que referimos atrás pode ser escrita na forma $-\omega = d\sigma$, portanto $\omega = d(-\sigma)$. \square

III.7.11. Seja $M \subset E$ uma variedade de dimensão m , compacta, sem bordo, orientável e não vazia. Existe então sobre M uma forma diferencial suave de grau m , que é fechada mas não exacta, a saber, a forma diferencial elemento de volume, $Vol = (Vol_x)_{x \in M}$, associada a uma orientação suave e a um produto interno de E . Em particular, no caso em que $m \geq 1$, a variedade M não é suavemente contráctil.

Dem: Fixemos um produto interno em E e consideremos sobre M uma orientação suave. Sabemos então que $Vol = (Vol_x)_{x \in M}$ é uma forma diferencial suave de grau m , que vai ser automaticamente fechada, uma vez que sobre uma variedade de dimensão m todas as formas diferenciais de grau maior que m são identicamente nulas. Vamos demonstrar, por absurdo, que a forma diferencial Vol não é exacta. Suponhamos assim que existia uma

forma diferencial suave ω de grau $m - 1$, tal que $Vol = d\omega$. Sendo μ_M a medida de Lebesgue de M , o teorema de Stokes permitia-nos escrever então

$$\mu_M(M) = \int_M 1 d\mu_M(x) = \int_M Vol = \int_M d\omega = \int_{\partial_1(M)} \omega_{/\partial_1(M)} = 0,$$

o que é absurdo. \square

III.7.12. Como exemplo de variedade nas condições anteriores, temos a hipersuperfície esférica S de um espaço euclidiano E , com dimensão $n + 1$ ($n \geq 0$),

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

O facto de S ser orientável vem de que podemos considerar em S a orientação que resulta de S ser o bordo de índice 1 da bola fechada

$$B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\},$$

que é uma variedade de dimensão $n + 1$, sobre a qual podemos considerar uma orientação constante.

§8. Aplicação à demonstração de resultados topológicos.

III.8.1. Dados um conjunto M e um subconjunto $S \subset M$, chama-se *retracção* de M sobre S a uma aplicação $f: M \rightarrow S$ que prolongue a identidade de S , isto é, que verifique $f(x) = x$, para cada $x \in S$. Por outras palavras, dizer que $f: M \rightarrow S$ é uma retracção de M sobre S é o mesmo que dizer que se tem $f \circ \iota = Id_S$, onde $\iota: S \rightarrow M$ é a inclusão.

III.8.2. Se M é um espaço topológico separado e se f é uma retracção contínua de M sobre um subconjunto S , então S é fechado em M .

Dem: Basta atender a que $S = \{x \in M \mid f(x) = x\}$. \square

III.8.3. **(Inexistência de retracções suaves sobre o bordo)** Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m , compacta, orientável e não vazia. Não existe então nenhuma retracção suave de M sobre o bordo $\partial_1(M)$.

Dem: Suponhamos que $f: M \rightarrow S$ era uma retracção suave de M sobre o bordo $S = \partial_1(M)$, e consideremos sobre S a orientação induzida por uma das orientações suaves de M . Tem-se, é claro, $m \geq 1$, visto que não existe nenhuma aplicação de M no conjunto vazio. A variedade S tem dimensão $m - 1$ e podemos considerar sobre S a forma diferencial elemento de volume $Vol = (Vol_x)_{x \in S}$, que é uma forma diferencial suave de grau $m - 1$. Uma vez que numa variedade de dimensão $m - 1$ todas as formas diferenciais de grau m são nulas, tem-se $dVol = 0$. Consideremos a forma diferencial suave de grau $m - 1$, f^*Vol , sobre M , para a qual se tem ainda

$$df^*Vol = f^*dVol = 0.$$

Aplicando o teorema de Stokes, vem

$$0 = \int_M df^*Vol = \int_S (f^*Vol)_{/S}.$$

Mas, sendo $\iota: S \rightarrow M$ a inclusão, tem-se

$$\begin{aligned} \int_S (f^*Vol)_{/S} &= \int_S \iota^* f^*Vol = \int_S (f \circ \iota)^*Vol = \\ &= \int_S Id_S^*Vol = \int_S Vol = \mu_S(S) \neq 0, \end{aligned}$$

pelo que fomos conduzidos a um absurdo (repare-se que S não é vazio, mais uma vez por não existir nenhuma aplicação de M no conjunto vazio).□

III.8.4. (**Corolário**) Sejam E um espaço euclidiano de dimensão n , B a bola fechada,

$$B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\},$$

e $S \subset B$ a hipersuperfície esférica,

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

Não existe então nenhuma retracção suave de B sobre S .

Nas condições do corolário precedente pode-se provar a afirmação mais forte, que garante que não existe nenhuma retracção contínua de B sobre S . Para provarmos isso, apresentamos dois resultados sobre aproximação de funções contínuas por aplicações suaves, resultados que são úteis em várias situações em que se pretende generalizar resultados sobre aplicações suaves para obter outros sobre aplicações contínuas.

III.8.5. Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais munido duma norma, $M \subset E$ um conjunto fechado e $f: M \rightarrow F$ uma aplicação contínua. Para cada $\delta > 0$, existe então uma aplicação suave $g: E \rightarrow F$, tal que, para cada $x \in M$, $\|g(x) - f(x)\| < \delta$.³⁴

Dem:³⁵ Seja $\delta > 0$ e consideremos, para cada $y \in M$, o aberto U_y de M ,

$$U_y = \{x \in M \mid \|f(y) - f(x)\| < \delta\},$$

que contém y . Para cada $y \in M$, podemos considerar um aberto \widehat{U}_y de E , tal que $U_y = \widehat{U}_y \cap M$ e, aplicando o teorema da partição da unidade à cobertura

³⁴Ver o exercício III.41 adiante para generalizações deste resultado.

³⁵Esta demonstração é baseada na de um resultado análogo que encontramos em [14].

aberta de E constituída pelos \widehat{U}_y e por $E \setminus M$, e ignorando a função correspondente a este último aberto, concluimos a existência de uma família localmente finita $(\varphi_y)_{y \in M}$, de aplicações suaves $\varphi_y: E \rightarrow [0, 1]$ tais que φ_y se anula fora de uma certa parte de \widehat{U}_y fechada em E , que, para cada $x \in E$, $\sum_{y \in M} \varphi_y(x) \leq 1$ e que, para cada $x \in M$, $\sum_{y \in M} \varphi_y(x) = 1$. Seja $g: E \rightarrow F$ a aplicação suave definida por

$$g(x) = \sum_{y \in M} \varphi_y(x) f(y)$$

(soma de uma família localmente finita de aplicações suaves). Seja $x \in M$. Notemos M_x o conjunto finito dos $y \in M$ tais que $\varphi_y(x) \neq 0$ e reparemos que, para cada $y \in M_x$, vem $x \in \widehat{U}_y \cap M = U_y$, donde $\|f(y) - f(x)\| < \delta$. Tem-se portanto

$$\begin{aligned} \|g(x) - f(x)\| &= \left\| \sum_{y \in M_x} \varphi_y(x) f(y) - \sum_{y \in M_x} \varphi_y(x) f(x) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{y \in M_x} \varphi_y(x) (f(y) - f(x)) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{y \in M_x} \varphi_y(x) \|f(y) - f(x)\| < \sum_{y \in M_x} \varphi_y(x) \delta = \delta. \square \end{aligned}$$

III.8.6. Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais munido de uma norma, $M \subset E$ um conjunto fechado e S uma parte fechada de M . Seja $f: M \rightarrow F$ uma aplicação contínua tal que a restrição $f|_S: S \rightarrow F$ seja suave. Para cada $\delta > 0$ existe então uma aplicação suave $g: E \rightarrow F$ tal que $g|_S = f|_S$ e que $\|g(x) - f(x)\| < \delta$, para cada $x \in M$.

Dem: O facto de $f|_S$ ser uma aplicação suave, com domínio S fechado em E , garante-nos a existência de uma aplicação suave $\widehat{f}: E \rightarrow F$, prolongando $f|_S$ (corolário do teorema da partição da unidade). Pelo resultado precedente, podemos considerar uma aplicação suave $\widehat{g}: E \rightarrow F$ tal que, para cada $x \in M$, $\|\widehat{g}(x) - f(x)\| < \delta$. Consideremos o aberto U de M , contendo S ,

$$U = \{x \in M \mid \|\widehat{f}(x) - f(x)\| < \delta\},$$

e seja \widehat{U} um aberto de E , tal que $U = \widehat{U} \cap M$. Pelo teorema da partição da unidade, relativo à apresentação de E como união dos abertos \widehat{U} e $E \setminus S$, podemos considerar uma aplicação suave $\varphi: E \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = 1$, para cada $x \in S$, e $\varphi(x) = 0$, para cada $x \notin \widehat{U}$. Consideremos finalmente a aplicação suave $g: E \rightarrow F$, definida por

$$g(x) = \varphi(x) \widehat{f}(x) + (1 - \varphi(x)) \widehat{g}(x).$$

Se $x \in S$, vem $\varphi(x) = 1$, portanto $g(x) = \widehat{f}(x) = f(x)$. Se $x \in M$, duas hipóteses são possíveis: Se $x \notin U$, tem-se $\varphi(x) = 0$, donde

$$\|g(x) - f(x)\| = \|\widehat{g}(x) - f(x)\| < \delta;$$

se $x \in U$, tem-se simultaneamente $\|\widehat{f}(x) - f(x)\| < \delta$ e $\|\widehat{g}(x) - f(x)\| < \delta$, pelo que, mais uma vez,

$$\begin{aligned} \|g(x) - f(x)\| &= \|\varphi(x)(\widehat{f}(x) - f(x)) + (1 - \varphi(x))(\widehat{g}(x) - f(x))\| \leq \\ &\leq \varphi(x)\|\widehat{f}(x) - f(x)\| + (1 - \varphi(x))\|\widehat{g}(x) - f(x)\| < \\ &< \varphi(x)\delta + (1 - \varphi(x))\delta = \delta. \square \end{aligned}$$

III.8.7. (Corolário) Sejam E um espaço euclidiano de dimensão n , B a bola fechada,

$$B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\},$$

e $S \subset B$ a hipersuperfície esférica,

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

Não existe então nenhuma retracção contínua de B sobre S .

Dem: Suponhamos que $f: B \rightarrow S$ era uma retracção contínua de B sobre S . A restrição de f a S era a identidade de S , em particular suave, pelo que, pelo resultado precedente, ia existir uma aplicação suave $g: E \rightarrow E$ tal que $g|_S = f|_S = Id_S$ e que, para cada $x \in B$, $\|g(x) - f(x)\| < 1$, o que implica, em particular, por ser $\|f(x)\| = 1$, que $g(x) \neq 0$. A aplicação g não tinha que tomar valores em S , mas podemos considerar a aplicação suave $h: B \rightarrow S$, definida por $h(x) = g(x)/\|g(x)\|$. Esta aplicação ia ser uma retracção suave de B sobre S , o que contrariava a conclusão de III.8.4. \square

III.8.8. (Teorema do ponto fixo de Brouwer) Sejam E um espaço euclidiano e $B \subset E$ a bola fechada,

$$B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Se $f: B \rightarrow B$ é uma aplicação contínua, existe então $x \in B$ tal que $f(x) = x$.

Dem: Notemos $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Vamos supor que, para cada $x \in B$, $f(x) \neq x$ e tentar chegar a um absurdo, construindo uma aplicação contínua $g: B \rightarrow S$ que seja uma retracção de B sobre S . Geometricamente, a aplicação g associa a cada $x \in B$ um dos pontos de intersecção de S com a recta determinada por x e $f(x)$, a saber o que está do lado de x . Por outras palavras, vai-se ter $g(x) = x + \varphi(x)(f(x) - x)$, onde a aplicação $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}$ deve verificar as condições $\varphi(x) \leq 0$ e

$$\langle x + \varphi(x)(f(x) - x), x + \varphi(x)(f(x) - x) \rangle = 1.$$

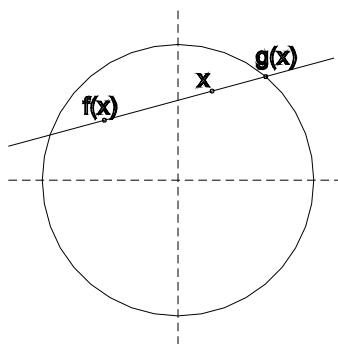


Figura 4

Esta última condição é equivalente à equação do segundo grau em $\varphi(x)$

$$\langle f(x) - x, f(x) - x \rangle \varphi(x)^2 + 2 \langle f(x) - x, x \rangle \varphi(x) - (1 - \langle x, x \rangle) = 0.$$

Reparemos que, se $x \in S$, a desigualdade de Cauchy-Schwartz garante-nos que

$$\langle f(x), x \rangle \leq |\langle f(x), x \rangle| \leq \|f(x)\| \leq 1 = \langle x, x \rangle$$

e que, se fosse $\langle f(x), x \rangle = \langle x, x \rangle$, $f(x)$ e x seriam linearmente dependentes e ter-se-ia $\|f(x)\| = 1$, pelo que, uma vez que, por hipótese, $f(x) \neq x$, viria $f(x) = -x$, o que era absurdo, por se ter então $\langle f(x), x \rangle = -1 \neq 1 = \langle x, x \rangle$. Concluímos assim que, se $x \in S$, tem-se $\langle f(x), x \rangle < \langle x, x \rangle$, portanto $\langle f(x) - x, x \rangle < 0$. Podemos agora examinar de novo a equação do segundo grau em $\varphi(x)$ atrás referida para concluir que, se $x \in S$, aquela equação admite uma solução nula e a outra estritamente positiva e que, se $x \in B \setminus S$, aquela equação admite duas raízes reais, uma estritamente positiva e a outra estritamente negativa; em qualquer caso, existe uma única solução menor ou igual a 0, a saber,

$$\varphi(x) = \frac{-\langle f(x) - x, x \rangle - \sqrt{\langle f(x) - x, x \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|f(x) - x\|^2}}{\|f(x) - x\|^2}.$$

A aplicação $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}$, assim definida, é contínua, ficando portanto contínua a correspondente aplicação $g: B \rightarrow S$, definida por

$$g(x) = x + \varphi(x)(f(x) - x),$$

aplicação que vai ser uma retração de B sobre S , visto que, para cada $x \in S$, tem-se $\varphi(x) = 0$, portanto $g(x) = x$. \square

III.8.9. (Teorema da esfera despenteada) Seja E um espaço euclidiano de dimensão n ímpar e seja $S \subset E$ a hipersuperfície esférica,

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

Se $X: S \rightarrow E$ é uma aplicação suave, então existe $x \in S$ tal que $X_x \in \mathbb{R}x$. Em particular, se $X = (X_x)_{x \in S}$ é um campo vectorial suave sobre S , então existe $x \in S$ tal que $X_x = 0$.

Dem: Pode-se evidentemente já supor que a dimensão n de E é maior que 1, sem o que o resultado é trivial. Suponhamos que $X: S \rightarrow E$ é uma aplicação suave tal que, para cada $x \in S$, $X_x \notin \mathbb{R}x$, isto é, x e X_x são linearmente independentes. Podemos então considerar uma aplicação suave $H: [0, 1] \times S \rightarrow S$, definida por

$$H(t, x) = \frac{\cos(\pi t)x + \sin(\pi t)X_x}{\|\cos(\pi t)x + \sin(\pi t)X_x\|},$$

a qual verifica $H(0, x) = x$ e $H(1, x) = -x$, sendo portanto uma homotopia suave de Id_S para $-Id_S$. Fixemos uma orientação de E e consideremos sobre S a orientação suave que lhe vem de ser o bordo da bola

$$B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\},$$

com a orientação constante. O facto de a dimensão de E ser ímpar implica que o isomorfismo $-Id_E: E \rightarrow E$ inverte as orientações, visto que, se w_1, \dots, w_n for uma base directa de E , a base $-w_1, \dots, -w_n$ de E vai ser retrógrada. Segue-se daqui que $-Id_B: B \rightarrow B$ é um difeomorfismo invertendo as orientações, pelo que o difeomorfismo $-Id_S: S \rightarrow S$ também inverte as orientações (cf. III.5.4). Sendo Vol a forma diferencial elemento de volume de S , que, por ter grau igual à dimensão de S vai ser automaticamente fechada, podemos aplicar III.7.6 para garantir a existência de uma forma diferencial suave σ , de grau $n - 2$ sobre S , tal que

$$Id_S^* Vol - (-Id_S)^* Vol = d\sigma.$$

Tendo em conta o teorema de Stokes, assim como III.4.4, podemos agora escrever

$$\begin{aligned} \mu_S(S) &= \int_S Vol = \int_S Id_S^* Vol - \int_S d\sigma = \\ &= \int_S (-Id_S)^* Vol = - \int_S Vol = -\mu_S(S), \end{aligned}$$

o que é absurdo por ser $\mu_S(S) \neq 0$. Por fim, no caso em que X é um campo vectorial suave, tem-se $\langle X_x, x \rangle = 0$, pelo que a condição $X_x \in \mathbb{R}x$ implica $X_x = 0$. \square

III.8.10. (Corolário) Seja E um espaço euclidiano de dimensão ímpar e seja $S \subset E$ a hipersuperfície esférica,

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

Se $X: S \rightarrow E$ é uma aplicação contínua, então existe $x \in S$ tal que $X_x \in \mathbb{R}x$. Em particular, no caso em que X é um campo vectorial contínuo sobre S , existe $x \in S$ tal que $X_x = 0$.

Dem: Suponhamos que $X: S \rightarrow E$ era uma aplicação contínua tal que, para cada $x \in S$, $X_x \notin \mathbb{R}x$. Resulta daqui que o subconjunto compacto A de $E \times E$, constituído pelos (x, X_x) , com $x \in X$, não intersectava o subconjunto fechado B de $E \times E$, formado pelos pares (x, w) , com $x \in S$ e $w \in \mathbb{R}x$ (reparar que, para $x \in S$, esta última condição é equivalente a $w = \langle w, x \rangle x$). Podíamos então considerar a distância estritamente positiva δ , do compacto A ao fechado B , em que consideramos, para fixar ideias, a norma do máximo em $E \times E$. Tendo em conta o resultado de aproximação III.8.5, podíamos considerar uma aplicação suave $Y: S \rightarrow E$ tal que, para cada $x \in S$, $\|Y_x - X_x\| < \delta$, o que implicava que

$$\|(x, Y_x) - (x, X_x)\| < \delta,$$

portanto $(x, Y_x) \notin B$, ou seja $Y_x \notin \mathbb{R}x$. Chegámos assim a uma contradição com a conclusão do resultado precedente. \square

III.8.11. (**Nota**) Uma maneira de olhar intuitivamente para os resultados precedentes é imaginar que a hipersuperfície esférica é cabeluda e que a tentamos pentear de maneira suave ou simplesmente contínua. Podemos então garantir que há pelo menos um ponto onde o cabelo tem que ficar em pé. Repare-se também que a condição de E ter dimensão ímpar é essencial. Por exemplo, em \mathbb{R}^2 , a aplicação suave de S em \mathbb{R}^2 , que a (x, y) associa $(-y, x)$, é um campo vectorial suave que nunca se anula e um exemplo análogo pode ser apresentado em cada espaço \mathbb{R}^{2n} .

§9. Teorema de Stokes singular. Ângulo sólido orientado.

III.9.1. Seja $M \subset E$ uma variedade. Vamos chamar *variedade singular* de dimensão n em M a um par (A, f) , em que $A \subset \widehat{E}$ é uma variedade de dimensão n suavemente orientada e $f: A \rightarrow M$ é uma aplicação contínua. Dizemos que a variedade singular é *compacta* se isso acontecer a A e que ela é *sem bordo* se A é uma variedade sem bordo. Chamamos *bordo* da variedade singular à variedade singular determinada pelo bordo $\partial_1(A)$, com a orientação induzida, e pela restrição da aplicação f a esse bordo, restrição que será notada simplesmente $\partial(f)$. Dizemos que a variedade singular é *suave* se isso acontecer à aplicação f .

III.9.2. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave de grau n , com valores em \mathbb{K} . Se (A, f) é uma variedade singular suave de dimensão n em M , podemos considerar a forma diferencial suave $f^*\omega$, de grau n sobre A , e diz-se que ω é *integrável* em (A, f) se $f^*\omega$ for integrável em A , definindo-se nesse caso o integral de ω em (A, f) como

sendo igual ao integral de $f^*\omega$ em A :

$$\int_{(A,f)} \omega = \int_A f^*\omega.$$

Quando não houver risco de confusão sobre qual a variedade orientada A que se considera, usa-se também a notação

$$\int_f \omega = \int_{(A,f)} \omega.$$

III.9.3. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave de grau n , com valores em \mathbb{K} . Se (A, f) é uma variedade singular suave, compacta, de dimensão n em M , então ω é integrável em (A, f) .

Dem: Trata-se de uma consequência de III.4.7, visto que $f^*\omega$ vai ser uma forma diferencial suave de grau n , sobre a variedade compacta suavemente orientada A , com dimensão n . \square

III.9.4. (**Exemplo**) Sejam $M \subset E$ uma variedade e $g: M \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação suave, portanto também uma forma diferencial suave de grau 0, com valores em \mathbb{K} . Seja $A \subset \hat{E}$ um conjunto finito, que é portanto uma variedade compacta de dimensão 0, e consideremos uma orientação sobre A (automaticamente suave), notando, para cada $x \in A$, $\varepsilon_x = 1$ ou $\varepsilon_x = -1$, conforme a orientação do espaço vectorial, de dimensão 0, $T_x(A)$ seja a canônica ou não. Se $f: A \rightarrow M$ é uma aplicação arbitrária (automaticamente suave), tem-se então que

$$\int_f g = \sum_{x \in A} \varepsilon_x g(f(x)).$$

Dem: A forma diferencial f^*g , de grau 0, sobre A , não é mais do que a função composta $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{K}$. Uma vez que o elemento de volume do espaço vectorial $T_x(A)$, de dimensão 0, é ε_x , podemos escrever

$$(g \circ f)_x = \varepsilon_x g(f(x)) \text{Vol}_x$$

e portanto, uma vez que a medida de Lebesgue sobre A é a medida de contagem,

$$\int_f g = \int_A f^*g = \int_A \varepsilon_x g(f(x)) d\mu_A(x) = \sum_{x \in A} \varepsilon_x g(f(x)). \square$$

III.9.5. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave de grau $n \geq 1$, com valores em \mathbb{K} . Se (A, f) é uma variedade singular de dimensão n em M , com f aplicação constante, tem-se então que ω é integrável em (A, f) e $\int_{(A,f)} \omega = 0$.

Dem: O facto de f ser constante implica que, para cada $x \in A$, $Df_x = 0$ donde, uma vez que $n \geq 1$, $(f^*\omega)_x = Df_x^* \omega_{f(x)} = 0$. \square

III.9.6. Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades, $g: \widehat{M} \rightarrow M$ uma aplicação suave e $\omega = (\omega_z)_{z \in M}$ uma forma diferencial suave de grau n , com valores em \mathbb{K} . Se (A, f) é uma variedade singular suave de dimensão n em \widehat{M} , $(A, g \circ f)$ vai ser uma variedade singular suave de dimensão n em M e ω é integrável em $(A, g \circ f)$ se, e só se, $g^*\omega$ for integrável em (A, f) , tendo-se, nesse caso,

$$\int_{g \circ f} \omega = \int_f g^* \omega.$$

Dem: Trata-se de uma consequência imediata da definição, se repararmos que $(g \circ f)^*\omega = f^*g^*\omega$. \square

III.9.7. (**Reparametrização**) Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave de grau n , com valores em \mathbb{K} . Sejam A e \widehat{A} variedades de dimensão n suavemente orientadas e $f: \widehat{A} \rightarrow A$ um difeomorfismo conservando (resp. invertendo) as orientações. Se (A, g) é uma variedade singular suave em M , tem-se que ω é integrável em (A, g) se, e só se, ω é integrável em $(\widehat{A}, g \circ f)$ e, nesse caso,

$$\int_{(A,g)} \omega = \int_{(\widehat{A}, g \circ f)} \omega \quad (\text{resp. } \int_{(A,g)} \omega = - \int_{(\widehat{A}, g \circ f)} \omega).$$

Dem: Trata-se de uma consequência imediata da definição e de III.4.4, se repararmos que $(g \circ f)^*\omega = f^*g^*\omega$. \square

III.9.8. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave de grau n , real ou complexa. Sejam $B \subset M$ uma variedade de dimensão n , suavemente orientada, e (A, f) uma variedade singular de dimensão n em M , tal que f seja um difeomorfismo de A sobre B conservando (resp. invertendo) as orientações. Tem-se então que ω é integrável em (A, f) se, e só se, $\omega|_B$ é integrável em B e, nesse caso,

$$\int_f \omega = \int_B \omega|_B \quad (\text{resp. } \int_f \omega = - \int_B \omega|_B).$$

Dem: Trata-se de uma consequência imediata da definição e de III.4.4, se repararmos que $f^*\omega = f^*(\omega|_B)$. \square

III.9.9. (**Teorema de Stokes singular**) Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave de grau n sobre M , real ou complexa. Seja (A, f) uma variedade singular, compacta, suave, de dimensão $n + 1$, em M . Tem-se então que $d\omega$ é integrável em (A, f) , ω é integrável em $(\partial_1(A), \partial(f))$ e

$$\int_f d\omega = \int_{\partial(f)} \omega.$$

Dem: Este resultado vai ser uma consequência simples do teorema de Stokes, demonstrado em III.5.8. Com efeito, esse resultado, aplicado à forma diferencial suave de grau n sobre A , $f^*\omega$, garante-nos que se tem

$$\int_A df^*\omega = \int_{\partial_1(A)} (f^*\omega)_{/\partial_1(A)},$$

em que, em particular, as formas diferenciais $df^*\omega$ e $f^*\omega$ são integráveis sobre as variedades respectivas. Basta agora repararmos que $df^*\omega = f^*d\omega$, e portanto

$$\int_A df^*\omega = \int_f d\omega,$$

e que, notando $\iota: \partial_1(A) \rightarrow A$ a inclusão,

$$\int_{\partial_1(A)} (f^*\omega)_{/\partial_1(A)} = \int_{\partial_1(A)} \iota^* f^*\omega = \int_{\partial_1(A)} \partial(f)^*\omega = \int_{\partial f} \omega. \square$$

III.9.10. (Exemplo) Dada uma variedade $M \subset E$, um exemplo importante, e muito frequente, de variedade singular em M é o constituído pelos *caminhos* ou *trajectórias* em M , isto é, pelos pares $([a, b], f)$, com a e b números reais, verificando $a < b$, e $f: [a, b] \rightarrow M$ aplicação contínua. Trata-se de variedades singulares de dimensão 1, estando implícito que a orientação que se considera em $[a, b]$ é a que provém da orientação canónica de \mathbb{R} . Repare-se que $\partial_1([a, b]) = \{a, b\}$ e que, como se reconhece imediatamente, a orientação associada de $\{a, b\}$ é aquela para a qual $T_b(\{a, b\}) = \{0\}$ tem a orientação canónica e $T_a(\{a, b\}) = \{0\}$ tem a orientação não canónica. O teorema de Stokes singular pode, neste caso particular, ser enunciado do seguinte modo:

Sejam $M \subset E$ uma variedade e $g: M \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação suave. Se $f: [a, b] \rightarrow M$ é uma trajectória suave, tem-se

$$\int_f dg = g(f(b)) - g(f(a)).$$

É claro que este resultado tem também uma justificação trivial, independente do teorema de Stokes geral.

Vamos agora verificar que, quando a forma diferencial é fechada, o integral sobre duas variedades singulares suavemente homotópicas é o mesmo. Mais precisamente, começamos por estabelecer este resultado para as variedades singulares sem bordo e vemos em seguida que ele é

ainda válido para as variedades singulares com bordo, mediante uma condição restritiva sobre as homotopias.

III.9.11. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave, de grau n , real ou complexa, que seja fechada, isto é, que verifique $d\omega = 0$. Seja A uma variedade compacta, sem bordo, suavemente orientada e de dimensão n e sejam $f, g: A \rightarrow M$ duas aplicações suaves que sejam suavemente homotópicas. Tem-se então

$$\int_f \omega = \int_g \omega.$$

Dem: Tendo em conta III.7.6, vemos que, se $n = 0$, o resultado é uma consequência trivial de se ter $f^*\omega = g^*\omega$ e que, se $n > 0$, existe uma forma diferencial suave σ , de grau $n - 1$ sobre A , tal que $g^*\omega - f^*\omega = d\sigma$ e tem-se então, tendo em conta o teorema de Stokes e o facto de a variedade A não ter bordo,

$$\int_g \omega - \int_f \omega = \int_A g^*\omega - f^*\omega = \int_A d\sigma = \int_{\partial_1(A)} \sigma_{/\partial_1(A)} = 0,$$

donde o resultado. \square

Do ponto de vista formal o resultado anterior é inútil, visto que ele é uma caso particular do que apresentamos em seguida. Pareceu-nos útil começar por esse caso particular, tendo em conta a sua simplicidade e o facto de conter as ideias que nos conduzirão ao caso geral.

III.9.12. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave, fechada e de grau n , com valores em \mathbb{K} . Seja A uma variedade compacta, eventualmente com bordo, suavemente orientada e de dimensão n e sejam $f, g: A \rightarrow M$ duas aplicações suaves com a mesma restrição a $\partial_1(A)$ e que sejam *suavemente homotópicas com bordo fixo*, isto é, tais que exista uma aplicação suave $H: [0, 1] \times A \rightarrow M$, verificando as condições

$$\begin{aligned} H(0, x) &= f(x), & \text{para } x \in A, \\ H(1, x) &= g(x), & \text{para } x \in A, \\ H(t, x) &= f(x) = g(x), & \text{para } x \in \partial_1(A) \text{ e } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tem-se então

$$\int_f \omega = \int_g \omega.$$

Dem: No caso em que $n = 0$, sabemos, por III.7.6, que $f^*\omega = g^*\omega$, o que implica trivialmente o resultado (é claro que, neste caso, $\partial_1(A) = \emptyset$, pelo que

a hipótese suplementar sobre a homotopia é vazia e não temos nada de novo em relação ao resultado precedente). Suponhamos agora que $n > 0$ e, em vez de aplicar III.7.6, reexaminemos a respectiva demonstração. Sendo P o operador prismático, temos, como então, $PdH^*\omega = PH^*d\omega = 0$, pelo que, aplicando III.7.4, obtemos

$$g^*\omega - f^*\omega = \varphi_1^*H^*\omega - \varphi_0^*H^*\omega = PdH^*\omega + dPH^*\omega = dPH^*\omega.$$

Reparemos agora que $PH^*\omega$ é uma forma diferencial suave de grau $n - 1$ sobre A , cuja restrição a $\partial_1(A)$ é nula, visto que, se $x \in \partial_1(A)$ e w_1, \dots, w_{n-1} são tangentes a $\partial_1(A)$ em x , sai

$$\begin{aligned} (PH^*\omega)_x(w_1, \dots, w_{n-1}) &= \\ \int_0^1 (H^*\omega)_{(t,x)}((1, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_{n-1})) dt &= \\ = \int_0^1 \omega_{H(t,x)}(DH_{(t,x)}((1, 0)), DH_{(t,x)}((0, w_1)), \dots, DH_{(t,x)}((0, w_{n-1}))) dt &= 0, \end{aligned}$$

visto que a identidade $H(t, x) = f(x)$, para cada $x \in \partial_1(A)$ e $t \in [0, 1]$, implica que $DH_{(t,x)}((1, 0)) = 0$. Obtemos agora, tendo em conta o teorema de Stokes,

$$\int_g \omega - \int_f \omega = \int_A g^*\omega - f^*\omega = \int_A dPH^*\omega = \int_{\partial_1(A)} PH^*\omega_{/\partial_1(A)} = 0,$$

donde o resultado. \square

III.9.13. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave, fechada e de grau n , com valores em \mathbb{K} . Seja (A, f) uma variedade singular suave, sem bordo, de dimensão n em M . Suponhamos que existe uma variedade compacta B , de dimensão $n + 1$ e suavemente orientada, tal que $A = \partial_1(B)$ e que a orientação de A seja a induzida pela de B , e que existe um prolongamento suave $\hat{f}: B \rightarrow M$ de f . Tem-se então

$$\int_{(A,f)} \omega = 0.$$

Dem: Trata-se de uma consequência do teorema de Stokes singular, visto que, uma vez que $d\omega = 0$, sai

$$\int_f \omega = \int_{\partial \hat{f}} \omega = \int_{\hat{f}} d\omega = 0. \square$$

III.9.14. **(Teorema da variedade esburacada)** Seja B uma variedade de dimensão n e sejam C_1, \dots, C_p variedades sem cantos, de dimensão n , contidas em $\partial_0(B)$, fechadas em B e disjuntas duas a duas. Seja

$$\widehat{B} = B \setminus \bigcup_k \partial_0(C_k).$$

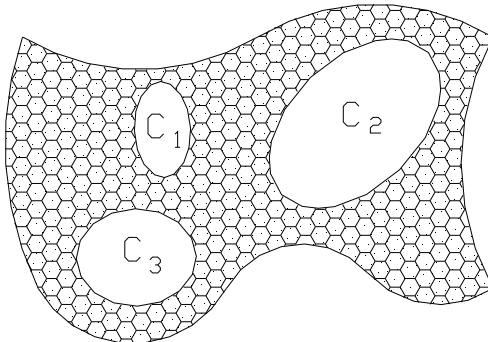


Figura 5

Tem-se então que cada $\partial_0(C_k)$ é aberto em B e que \widehat{B} é uma variedade de dimensão n , fechada em B , para a qual se tem

$$\partial_0(\widehat{B}) = \partial_0(B) \setminus \bigcup_k C_k, \quad \partial_1(\widehat{B}) = \partial_1(B) \cup \bigcup_k \partial_1(C_k)$$

e, para cada $q \geq 2$, $\partial_q(\widehat{B}) = \partial_q(B)$. Além disso, supondo que B está munido de uma orientação suave e que se considera em \widehat{B} e em cada C_k a orientação induzida pela de B ($T_x(\widehat{B}) = T_x(B)$, para cada $x \in \widehat{B}$, e $T_x(C_k) = T_x(B)$, para cada $x \in C_k$), tem-se então que, para cada $x \in \partial_1(C_k)$, a orientação induzida em $T_x(\partial_1(C_k)) = T_x(\partial_1(\widehat{B}))$ pela orientação de C_k é a oposta da induzida pela orientação de \widehat{B} e, para cada $x \in \partial_1(B)$, a orientação induzida em $T_x(B) = T_x(\widehat{B})$ pela orientação de B coincide com a induzida pela orientação de \widehat{B} .

Dem: O facto de cada $\partial_0(C_k)$ ser aberto em B é uma consequência imediata de aplicarmos o teorema da função inversa à inclusão de $\partial_0(C_k)$ em $\partial_0(B)$, que é aberto em B (a respectiva derivada em cada ponto vai ser a aplicação identidade do espaço vectorial tangente comum). Vem que \widehat{B} vai ser a união disjunta de $B \setminus \bigcup C_k$ com cada um dos $\partial_1(C_k)$. Para cada $x \in B \setminus \bigcup C_k$, tem-se $x \in \text{int}_B(\widehat{B})$, pelo que \widehat{B} vai ser no ponto x uma variedade com a mesma dimensão e índice que B . Do mesmo modo, no caso em que B está orientada, é evidente que, para $x \in \partial_1(B)$, a orientação induzida em $T_x(B) = T_x(\widehat{B})$ pela orientação de B coincide com a induzida pela orientação de \widehat{B} . Resta-nos examinar o que sucede a \widehat{B} num ponto $x_0 \in \partial_1(C_k)$.

Aplicando o resultado bem conhecido que caracteriza o modo como uma subvariedade, eventualmente com bordo, está inserida dentro da variedade sem bordo ambiente, à variedade C_k contida em $\partial_0(B)$, concluímos a existência de um espaço vectorial F , com uma base w_1, \dots, w_n , de um aberto

V de $\partial_0(B)$, com $x_0 \in V$, de um aberto U de F , com $0 \in U$ e de um difeomorfismo $\psi: U \rightarrow V$, com $\psi(0) = x_0$, de modo que, sendo J_+ o sector de F , constituído pelos vectores com a última componente naquela base maior ou igual a 0, $\psi^{-1}(V \cap C_k) = U \cap J_+$. Se necessário reduzindo estes abertos, pode-se já supor que V não intersecta nenhum dos restantes $C_{k'}$. Tem-se então que $\psi^{-1}(V \cap \partial_1(C_k))$ é constituído pelos pontos de $U \cap J_+$ onde J_+ é uma variedade de índice 1, isto é, por aqueles cuja última componente é nula e daqui deduzimos que, sendo J_- o sector de F constituído pelos vectores com última componente menor ou igual a 0, $\psi^{-1}(V \cap \hat{B}) = U \cap J_-$. Obtemos portanto, por restrição de ψ , um difeomorfismo de $U \cap J_-$ sobre $V \cap \hat{B}$, o que mostra que \hat{B} é, no ponto x_0 , uma variedade de dimensão n e índice 1. Além disso, uma vez que w_n é tangente, mas não estritamente tangente, a J_- e $-w_n$ é tangente, mas não estritamente tangente, a J_+ , concluímos que $D\psi_0(w_n)$ é tangente, mas não estritamente tangente a \hat{B} e que $-D\psi_0(w_n)$ é tangente, mas não estritamente tangente a C_k e daqui deduzimos imediatamente que, no caso em que B está orientada, as orientações induzidas em $T_x(\partial_1(C_k)) = T_x(\partial_1(\hat{B}))$ pelas orientações de C_k e de \hat{B} são opostas. \square

III.9.15. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave, fechada e de grau n , com valores em \mathbb{K} . Sejam B uma variedade compacta, suavemente orientada, de dimensão $n+1$, e C_1, \dots, C_p variedades compactas, sem cantos, de dimensão $n+1$, contidas em $\partial_0(B)$ e disjuntas duas a duas e, sendo $\hat{B} = B \setminus \bigcup \partial_0(C_k)$, seja $\hat{f}: \hat{B} \rightarrow M$ uma aplicação suave. Considerando então em $\partial_1(B)$ e em cada $\partial_1(C_k)$ as orientações induzidas pelas de B e C_k , respectivamente, tem-se

$$\int_{(\partial_1(B), \hat{f}|_{\partial_1(B)})} \omega = \sum_{k=1}^p \int_{(\partial_1(C_k), \hat{f}|_{\partial_1(C_k)})} \omega.$$

Dem: Tendo em conta o teorema anterior, \hat{B} é uma variedade compacta, de dimensão $n+1$, suavemente orientada e $\partial_1(\hat{B})$ é a união disjunta de $\partial_1(B)$ e dos $\partial_1(C_k)$, para cada $x \in \partial_1(B)$, a orientação de $T_x(\partial_1(\hat{B})) = T_x(\partial_1(B))$ induzida pela de \hat{B} coincidindo com a induzida pela de B e, para cada $x \in \partial_1(C_k)$, a orientação de $T_x(\partial_1(\hat{B})) = T_x(\partial_1(C_k))$ induzida pela de \hat{B} sendo a oposta da induzida pela de C_k . Tem-se então, tendo em conta III.9.13,

$$\int_{(\partial_1(\hat{B}), \hat{f}|_{\partial_1(\hat{B})})} \omega = 0,$$

bastando agora repararmos que se tem

$$\int_{(\partial_1(\hat{B}), \hat{f}/\partial_1(\hat{B}))} \omega = \int_{(\partial_1(B), \hat{f}/\partial_1(B))} \omega - \sum_{k=1}^p \int_{(\partial_1(C_k), \hat{f}/\partial_1(C_k))} \omega. \square$$

Um exemplo de forma diferencial fechada, cujo integral sobre uma variedade singular suave vai ter um significado geométrico importante, é a forma diferencial ângulo sólido, que definimos em seguida. Ela vai permitir generalizar, para dimensões superiores, o conceito de ângulo orientado descrito por um caminho plano em torno da origem (cf. a figura a seguir). Repare-se que, mesmo neste caso particular, a definição desse conceito envolve alguma delicadeza.

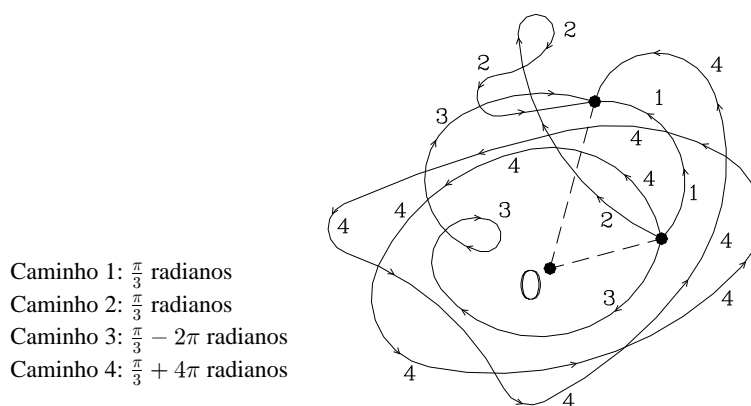


Figura 6

III.9.16. Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Notemos $S \subset E$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1,

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\},$$

que é uma variedade sem bordo, com dimensão $n - 1$, sobre a qual consideramos a orientação suave que lhe vem de ser o bordo de índice 1 de $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ (onde consideramos a orientação constante que lhe vem de E). Vamos notar Vol_S a forma diferencial elemento de volume de S e $\rho: E \setminus \{0\} \rightarrow S$ a aplicação suave definida por $\rho(x) = x/\|x\|$. Vamos chamar *forma diferencial ângulo sólido* de E a forma diferencial suave de grau $n - 1$ sobre $E \setminus \{0\}$, $\Omega: E \setminus \{0\} \rightarrow A^{n-1}(E; \mathbb{R})$, imagem recíproca de Vol_S por meio de ρ , $\Omega = \rho^* Vol_S$.

III.9.17. Nas condições anteriores, a forma diferencial ângulo sólido $\Omega: E \setminus \{0\} \rightarrow A^{n-1}(E; \mathbb{R})$ é uma forma diferencial fechada cuja restrição a

S é Vol_S .

Dem: Uma vez que, sobre a variedade S , de dimensão $n - 1$, todas as formas diferenciais de grau n são nulas, vemos que $dVol_S = 0$; daqui se deduz que $d\Omega = d\rho^*Vol_S = \rho^*dVol_S = 0$, o que mostra que a forma diferencial Ω é fechada. Por fim, sendo $\iota: S \rightarrow E \setminus \{0\}$ a inclusão, tem-se $\rho \circ \iota = Id_S$, pelo que

$$\Omega_{/S} = \iota^* \rho^* Vol_S = (\rho \circ \iota)^* Vol_S = Id_S^* Vol_S = Vol_S. \square$$

III.9.18. Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e seja (A, f) uma variedade singular suave, de dimensão $n - 1$, em $E \setminus \{0\}$ (portanto A é uma variedade de dimensão $n - 1$, suavemente orientada e $f: A \rightarrow E \setminus \{0\}$ é uma aplicação suave). Diz-se que (A, f) tem ângulo sólido se a forma diferencial Ω for integrável em (A, f) e define-se então o *ângulo sólido orientado* de (A, f) (subentendido, em torno de $0 \in E$) como sendo o número real

$$\angle(A, f) = \int_{(A, f)} \Omega,$$

que será notado simplesmente $\angle(f)$ quando não houver perigo de confusão sobre qual a variedade orientada A que se considera. É claro que, se a variedade singular A é compacta, e é esse o caso que usualmente terá mais interesse, ela vai ter automaticamente ângulo sólido. Repare-se que este ângulo depende quer da orientação de A quer da de E , vindo multiplicado por -1 sempre que se troca uma daquelas orientações.

Um caso particular importante é aquele em que A é uma subvariedade compacta de dimensão $n - 1$ de $E \setminus \{0\}$, suavemente orientada. Define-se então o *ângulo sólido orientado* de A , $\angle(A)$, como sendo o ângulo sólido orientado da variedade singular (A, ι) , onde $\iota: A \rightarrow E \setminus \{0\}$ é a inclusão. Tem-se portanto, neste caso,

$$\angle(A) = \int_A \Omega_{/A}.$$

A razão pela qual se utiliza a expressão “ângulo sólido orientado” decorre intuitivamente da propriedade seguinte, que caracteriza o valor deste no caso particular em que a composição $\rho \circ f$ é um difeomorfismo de A sobre uma subvariedade de S , que ou conserva ou inverte as orientações. Relembrar, a propósito, o que se disse no exercício I.8.

III.9.19. Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e seja (A, f) uma variedade singular suave de dimensão $n - 1$ em $E \setminus \{0\}$, tal que $\rho \circ f$ seja um difeomorfismo de A sobre um subconjunto B de S , que conserve (resp. inverta) as orientações. Tem-se então que (A, f) tem ângulo sólido e $\angle(A, f)$ é igual a $\mu_S(B)$ (resp. igual a $-\mu_S(B)$).

Dem: Seja $\varepsilon = 1$ no caso em que $\rho \circ f$ conserva as orientações e $\varepsilon = -1$ no

caso em que $\rho \circ f$ inverte as orientações. Tem-se então, tendo em conta III.4.4,

$$\begin{aligned} \angle(A, f) &= \int_A f^* \Omega = \int_A f^* \rho^* Vol_S = \int_A (\rho \circ f)^* Vol_{S/B} = \\ &= \varepsilon \int_B Vol_{S/B} = \varepsilon \mu_S(B). \square \end{aligned}$$

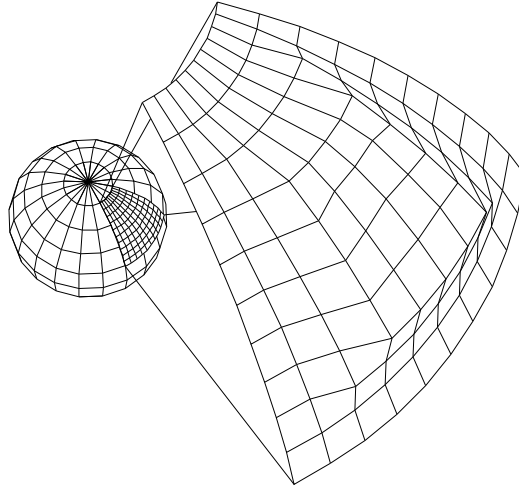


Figura 7

As hipóteses do resultado anterior são, de algum modo, excepcionais e, em casos mais gerais, podemos, quando muito, tentar obter uma decomposição do domínio como união de um conjunto de medida nula com um número finito de subconjuntos abertos disjuntos, onde a restrição de f verifique as condições anteriores; o ângulo sólido orientado de f pode então ser calculado como soma dos ângulos sólidos orientados das restrições de f a esses abertos. É com uma decomposição deste tipo que determinámos intuitivamente os ângulos sólidos orientados dos caminhos na figura 6. Estas decomposições não são sempre possíveis e a sua utilização nos casos em que E tem dimensão maior que 2 não será em geral cómoda. Em qualquer caso não as poderemos utilizar para inferir resultados sobre variedades singulares gerais, sendo apenas úteis em justificações heurísticas, que nos ajudem a intuir o que se está a passar.

Os exemplos apresentados na figura 6 sugerem que, dados dois caminhos com as mesmas extremidades, a diferença dos respectivos ângulos sólidos orientados é um múltiplo inteiro de 2π . Os próximos resultados conduzirão à demonstração deste facto e da respectiva generalização para um espaço euclidiano E de dimensão n e variedades singulares compactas de dimensão $n - 1$ com mesma restrição ao bordo, em que a quantidade 2π é

substituída pela medida σ_{n-1} da hipersuperfície esférica unitária de dimensão $n - 1$.

III.9.20. Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Sejam B uma variedade compacta, suavemente orientada, de dimensão n e $\hat{f}: B \rightarrow E$ uma aplicação suave tal que, para cada x em $\partial(B) = \bigcup_{j \geq 1} \partial_j(B)$, $\hat{f}(x) \neq 0$.

Suponhamos ainda que 0 é um valor regular da restrição $\hat{f}|_{\partial_0(B)}: \partial_0(B) \rightarrow E$. Então $\hat{f}^{-1}(\{0\})$ é um subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_p\}$ de $\partial_0(B)$, tal que, para cada $1 \leq k \leq p$, $D\hat{f}_{x_k}: T_{x_k}(B) \rightarrow E$ é um isomorfismo e, notando $\varepsilon_k = 1$ ou $\varepsilon_k = -1$, conforme este isomorfismo conserve ou inverta as orientações, tem-se que o ângulo sólido orientado de $\hat{f}|_{\partial_1(B)}: \partial_1(B) \rightarrow E \setminus \{0\}$ é igual a $\sigma_{n-1} \sum_{k=1}^p \varepsilon_k$.

Dem: Vem que $\hat{f}^{-1}(\{0\})$ é um subconjunto fechado de B , e portanto um compacto. Por outro lado, o facto de supormos $\hat{f}(x) \neq 0$, para cada $x \in \partial(B)$ implica que aquele compacto está contido em $\partial_0(B)$. O facto de 0 ser um valor regular da restrição de \hat{f} a $\partial_0(B)$ implica agora que $\hat{f}^{-1}(\{0\})$ é uma variedade de dimensão 0 , a qual, sendo compacta, vai ser um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_p\}$ (a família dos conjuntos unitários vai ser uma cobertura aberta, de onde se pode extrair uma subcobertura finita). Pelo teorema da função inversa, podemos escolher, para cada $1 \leq k \leq p$, um aberto U_k de $\partial_0(B)$, com $x_k \in U_k$, e um aberto V_k de E , com $0 \in V_k$, tal que $f|_{U_k}$ seja um difeomorfismo de U_k sobre V_k e, se necessário reduzindo estes abertos, podemos já supor que os U_k são disjuntos dois a dois e que cada um dos difeomorfismos $f|_{U_k}: U_k \rightarrow V_k$ ou conserva ou inverte as orientações (cf. III.5.7). Vem que $\bigcap V_k$ é um aberto de E , contendo 0 , pelo que existe $r > 0$ tal que a bola fechada $\overline{B}_r(0)$ esteja contida naquela intersecção. Sendo $S_r = \{y \in E \mid \|y\| = r\}$, que é uma variedade de dimensão $n - 1$, consideramos em S_r a orientação que lhe vem de ser o bordo de $\overline{B}_r(0)$ e reparamos que a restrição de ρ a S_r , definida por $\rho(y) = y/r$, vai ser um difeomorfismo de S_r sobre $S = S_1$, que conserva as orientações, por ser a restrição do difeomorfismo de $\overline{B}_r(0)$ sobre $\overline{B}_1(0)$, definido pela mesma fórmula, que conserva claramente as orientações.

Notemos, para cada k , $C_k = (f|_{U_k})^{-1}(\overline{B}_r(0))$, que é portanto uma variedade compacta, sem cantos, de dimensão n , contida em U_k . Uma vez que a aplicação suave $\hat{f}: B \rightarrow E$ aplica $\hat{B} = B \setminus \bigcup_k \partial_0(C_k)$ em $E \setminus \{0\}$, podemos

deduzir de III.9.15 que o ângulo sólido orientado da restrição de \hat{f} a $\partial_1(B)$ é igual à soma dos ângulos sólidos orientados das restrições de \hat{f} aos $\partial_1(C_k)$ e tudo o que temos que demonstrar é que o ângulo sólido orientado da restrição de \hat{f} a cada $\partial_1(C_k)$ é $\varepsilon_k \sigma_{n-1}$. Ora, tendo em conta o facto de a restrição de \hat{f}

a C_k ser um difeomorfismo de C_k sobre $\overline{B}_r(0)$, que conserva ou inverte as orientações conforme $\varepsilon_k = 1$ ou $\varepsilon_k = -1$, deduzimos que a restrição de \widehat{f} a $\partial_1(C_k)$ é um difeomorfismo de $\partial_1(C_k)$ sobre S_r , que conserva ou inverte as orientações conforme $\varepsilon_k = 1$ ou $\varepsilon_k = -1$, e portanto que a restrição de $\rho \circ \widehat{f}$ a $\partial_1(C_k)$ é um difeomorfismo de $\partial_1(C_k)$ sobre S , que conserva ou inverte as orientações conforme $\varepsilon_k = 1$ ou $\varepsilon_k = -1$. Aplicando III.9.19, concluímos portanto que o ângulo sólido orientado da restrição de \widehat{f} a $\partial_1(C_k)$ é efectivamente $\varepsilon_k \sigma_{n-1}$. \square

III.9.21 (**Corolário**) Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e $B \subset E$ uma variedade compacta de dimensão n , tal que $0 \notin \partial(B) = \bigcup_{j \geq 1} \partial_j(B)$, sobre a qual se considera a orientação induzida. Considerando em

$\partial_1(B)$ a orientação induzida pela de B , tem-se então que o ângulo sólido orientado de $\partial_1(B)$ é 0 ou σ_{n-1} , conforme se tenha $0 \notin B$ ou $0 \in \partial_0(B)$.

Dem: Basta aplicar o resultado anterior à inclusão de B em E . \square

III.9.22 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Sejam B uma variedade compacta, suavemente orientada, de dimensão n e $\widehat{f}: B \rightarrow E$ uma aplicação suave tal que, para cada x em $\partial(B) = \bigcup_{j \geq 1} \partial_j(B)$, $\widehat{f}(x) \neq 0$.

Tem-se então que o ângulo sólido orientado da restrição de \widehat{f} a $\partial_1(B)$ é um múltiplo inteiro de σ_{n-1} .

Dem: É claro que, se 0 fosse um valor regular da restrição de \widehat{f} a $\partial_0(B)$, tínhamos uma consequência trivial de III.9.20.

Vamos começar por demonstrar o resultado com a hipótese suplementar de a variedade B não ter cantos, caso em que $\partial_1(B)$, sendo uma subvariedade fechada de B , é uma variedade compacta e sem bordo. Seja $r > 0$ tal que a bola aberta $B_r(0)$ não intersecte o compacto $\widehat{f}(\partial_1(B))$. Pelo corolário do teorema de Sard (cf. I.5.8), podemos considerar $y \in B_r(0)$, que seja um valor regular da restrição de \widehat{f} a $\partial_0(B)$ e então, sendo $\tilde{f}: B \rightarrow E$ a aplicação suave definida por $\tilde{f}(x) = \widehat{f}(x) - y$, tem-se que $0 \notin \tilde{f}(\partial_1(B))$ e 0 é um valor regular da restrição de \tilde{f} a $\partial_0(B)$, o que, por III.9.20, implica que o ângulo sólido orientado da restrição de \tilde{f} a $\partial_1(B)$ é um múltiplo inteiro de σ_{n-1} . Mas, tem lugar uma aplicação suave $H: [0, 1] \times \partial_1(B) \rightarrow E \setminus \{0\}$, definida por $H(t, x) = \widehat{f}(x) - ty$, para a qual se tem $H(0, x) = \widehat{f}(x)$ e $H(1, x) = \tilde{f}(x)$, pelo que deduzimos de III.9.11 que o ângulo sólido orientado da restrição de \widehat{f} a $\partial_1(B)$ coincide com o da restrição de \tilde{f} , sendo assim um múltiplo inteiro de σ_{n-1} .

Passemos, por fim, à demonstração do caso geral em que a variedade B pode ter cantos. Seja $K = \{x \in B \mid \widehat{f}(x) = 0\}$, que é um conjunto compacto contido em $\partial_0(B)$. O facto de $\partial_0(B)$ ser localmente compacto implica a existência de um aberto U de $\partial_0(B)$, contendo K e contido numa parte compacta K' de $\partial_0(B)$; pelo teorema da partição da unidade, relativo à cobertura de B formada pelos abertos U e $B \setminus K'$, podemos considerar uma

aplicação suave $\varphi: B \rightarrow [0, 1]$, nula fora de U e tal que $\varphi(x) = 1$, para cada $x \in K$. Outra vez pelo mesmo corolário do teorema de Sard, podemos considerar um valor regular $s \in]0, 1[$ da restrição de φ a $\partial_0(B)$. Seja

$$C = \{x \in B \mid \varphi(x) \geq s\} = \{x \in \partial_0(B) \mid \varphi(x) \geq s\}.$$

Vem que C vai ser uma variedade compacta, sem cantos, com dimensão n , contida em $\partial_0(B)$, tendo como bordo $\partial_1(C) = \{x \in B \mid \varphi(x) = s\}$. Uma vez que $K \subset \partial_0(C)$, e portanto a aplicação suave $\widehat{f}: B \rightarrow E$ aplica $B \setminus \partial_0(C)$ em $E \setminus \{0\}$, concluímos de III.9.15 que o ângulo sólido orientado da restrição de \widehat{f} a $\partial_1(B)$ coincide com o da sua restrição a $\partial_1(C)$, o qual, pelo caso particular estudado no início, é um múltiplo inteiro de σ_{n-1} . \square

III.9.23 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Seja A uma variedade compacta, suavemente orientada, de dimensão $n-1$ e sejam $f, g: A \rightarrow E \setminus \{0\}$ duas aplicações suaves tais que, para cada $x \in \partial_1(A)$, $f(x) = g(x)$. Tem-se então que $\angle(g) - \angle(f)$ é um múltiplo inteiro de σ_{n-1} .

Dem: Começemos por notar que, por continuidade, tem-se ainda $f(x) = g(x)$, para cada $x \in \partial(A) = \bigcup_{j \geq 1} \partial_j(A)$. Consideremos a variedade compacta de dimensão n , $B = [0, 1] \times A$. Para cada $(t, x) \in B$, tem-se

$$T_{(t,x)}(B) = \mathbb{R} \times T_x(A)$$

e podemos considerar neste espaço vectorial a orientação produto, isto é, aquela para a qual cada base w_1, \dots, w_{n-1} de $T_x(A)$ tem a mesma orientação que a base $(1, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_{n-1})$ de $\mathbb{R} \times T_x(A)$. Ficamos assim com uma orientação da variedade B , orientação que se verifica imediatamente ser suave (dado um campo de referenciais sobre um aberto U de A , obtemos, a partir dele, um campo de referenciais sobre $[0, 1] \times U$, com a mesma orientação). Seja $H: B \rightarrow E$ a aplicação suave definida por

$$H(t, x) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Se $(t, x) \in \partial(B) = \bigcup_{j \geq 1} \partial_j(B)$, então, ou $t \in \{0, 1\}$, e então $H(t, x) = f(x)$

ou $H(t, x) = g(x)$, portanto $H(t, x) \in E \setminus \{0\}$, ou $x \in \partial(A)$, e então $f(x) = g(x)$, donde $H(t, x) = f(x)$, portanto ainda $H(t, x) \in E \setminus \{0\}$. Podemos assim aplicar o resultado precedente para garantir que o ângulo sólido orientado da restrição de H a $\partial_1(B)$ é um múltiplo inteiro de σ_{n-1} e vamos agora mostrar que esse ângulo sólido orientado é igual a $\angle(g) - \angle(f)$, o que terminará a demonstração. Vem que $\partial_1(B)$ é a união disjunta das três variedades de dimensão $n-1$, $]0, 1[\times \partial_1(A)$, $\{0\} \times \partial_0(A)$ e $\{1\} \times \partial_1(A)$, pelo que o ângulo sólido orientado da restrição da H a $\partial_1(B)$ é a soma dos ângulos sólidos orientados das restrições de H a estas três variedades. Uma vez que, para cada $(t, x) \in]0, 1[\times \partial_1(A)$, $H(t, x) = f(x)$, vemos que a imagem recíproca da forma diferencial Ω pela restrição de H a $]0, 1[\times \partial_1(A)$ é igual à imagem recíproca por meio da projecção de

$]0, 1[\times \partial_1(A)$ sobre $\partial_1(A)$, da imagem recíproca de Ω pela restrição de f a $\partial_1(A)$, imagem recíproca essa que é nula por se tratar de uma forma diferencial de grau $n - 1$ sobre a variedade $\partial_1(A)$ de dimensão $n - 2$. Concluímos assim que o ângulo sólido orientado da restrição de H a $]0, 1[\times \partial_1(A)$ é 0. Consideremos agora os difeomorfismos

$$\varphi_0: \partial_0(A) \rightarrow \{0\} \times \partial_0(A), \quad \varphi_1: \partial_0(A) \rightarrow \{1\} \times \partial_0(A)$$

definidos por

$$\varphi_0(x) = (0, x), \quad \varphi_1(x) = (1, x).$$

Considerando nos contradomínios as orientações induzidas no bordo pela orientação produto de $[0, 1] \times A$, tem-se que φ_0 inverte as orientações e φ_1 conserva as orientações, visto que, dada uma base w_1, \dots, w_{n-1} de $T_x(A)$, as imagens destes vectores, tanto por $D\varphi_{0x}$ como por $D\varphi_{1x}$, são $(0, w_1), \dots, (0, w_{n-1})$ e que, no ponto $(1, x)$, o vector $(1, 0)$ é tangente, mas não estritamente tangente, a $[0, 1] \times A$ e, no ponto $(0, x)$, é o vector $(-1, 0)$ que está nessas condições. Tendo em conta III.9.7, concluímos que os ângulos sólidos orientados das restrições de H a $\{0\} \times \partial_0(A)$ e a $\{1\} \times \partial_0(A)$ são iguais respectivamente ao simétrico do ângulo sólido orientado de $H \circ \varphi_0: \partial_0(A) \rightarrow E \setminus \{0\}$ e ao ângulo sólido orientado de $H \circ \varphi_1: \partial_0(A) \rightarrow E \setminus \{0\}$, bastando reparar, por fim, que estas composições não são mais do que as restrições de f e g , respectivamente, e que $A \setminus \partial_0(A)$ tem medida nula, por ser união das variedades $\partial_j(A)$, com $j \geq 1$, que têm dimensão inferior à de A . \square

III.9.24 (Corolário) Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 2$. Seja A uma variedade compacta, suavemente orientada, de dimensão $n - 1$ e seja $f: A \rightarrow E \setminus \{0\}$ uma aplicação suave cuja restrição a $\partial_1(A)$ seja constante (é o que acontece, automaticamente, no caso em que a variedade A não tem bordo). Tem-se então que o ângulo sólido orientado de f é um múltiplo inteiro de σ_{n-1} .³⁶

Dem: Trata-se de uma consequência do resultado precedente, se repararmos que, tendo em conta III.9.5, uma aplicação constante de A em $E \setminus \{0\}$ tem ângulo sólido orientado nulo. \square

³⁶Repare-se que, ao contrário dos resultados anteriores, é necessário exigir aqui que E tenha dimensão pelo menos 2. No caso em que E tem dimensão 1, obtém-se um contra-exemplo simples tomando para A um conjunto unitário.

EXERCÍCIOS

Ex III.1 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada e munida de uma estrutura riemanniana suave. Dados $m - 1$ campos vectoriais suaves sobre M , X_1, \dots, X_{m-1} , mostrar que, considerando, para cada $x \in M$, o produto externo $X_{1x} \times \dots \times X_{m-1x}$, tem lugar um campo vectorial suave

$$X_1 \times \dots \times X_{m-1} = (X_{1x} \times \dots \times X_{m-1x})_{x \in M}.$$

Ex III.2 Começemos com algumas observações sobre notações muito utilizadas na prática. Suponhamos que M é uma variedade de dimensão m e que φ é um difeomorfismo de M sobre um aberto V num sector de \mathbb{R}^m , ou, mais geralmente, sobre um subconjunto (automaticamente total) de \mathbb{R}^m (é claro que tais difeomorfismos só existem, em geral, localmente e, nesse caso, as observações seguintes só se aplicam a abertos convenientes de M). Notamos então $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ as componentes de φ , isto é, as aplicações suaves de M em \mathbb{R} definidas por

$$\varphi(y) = (\varphi_1(y), \dots, \varphi_m(y)).$$

a) Mostrar que têm lugar campos vectoriais suaves $\frac{\partial}{\partial \varphi_j}$ sobre M , onde $1 \leq j \leq m$, definidos por

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j}\right)_y = D\varphi_{\varphi(y)}^{-1}(e_j),$$

em que e_1, \dots, e_m é a base canónica de \mathbb{R}^m . Por outras palavras, estes são os campos vectoriais sobre M que estão φ -relacionados com os campos vectoriais constantes e_j sobre V .

b) Mostrar que, para cada $y \in M$, os vectores $(\frac{\partial}{\partial \varphi_j})_y$ constituem uma base de $T_y(M)$ e que os elementos da base associada de $L(T_y(M); \mathbb{R})$ são

$$d\varphi_{1y}, \dots, d\varphi_{my}.$$

c) Se $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ é uma forma diferencial de grau p sobre M , com valores em \mathbb{K} , mostrar que se pode escrever

$$\omega_y = \sum_{j_1 < \dots < j_p} f_{j_1, \dots, j_p}(y) d\varphi_{j_1 y} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_p y}$$

e que então ω é suave se, e só se cada aplicação $f_{j_1, \dots, j_p}: M \rightarrow \mathbb{K}$ é suave.

d) Mostrar, por indução em p , que se tem

$$d(d\varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{j_p}) = 0$$

e deduzir daqui que, se ω é uma forma diferencial suave de grau p , com valores em \mathbb{K} , com uma decomposição como em c), então

$$d\omega_y = \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \sum_j D(f_{j_1, \dots, j_p})_y \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right)_y d\varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{j_p}.$$

Nota: É frequente e clássico utilizar as notações

$$dx_1, \dots, dx_m \quad \text{em vez de} \quad d\varphi_1, \dots, d\varphi_m$$

e as notações

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \quad \text{em vez de} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi_m}.$$

Estas últimas apresentam a seguinte particularidade: Se $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação suave, a fórmula de derivação das funções compostas mostra-nos que

$$Df_y \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_y = D(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(y)}(e_j) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}(\varphi(y)).$$

Ex III.3 (Formas diferenciais e funções de variável complexa) Neste exercício vamos notar z e \bar{z} as aplicações suaves de \mathbb{C} em \mathbb{C} , que a cada complexo z associam respectivamente z e o seu conjugado \bar{z} , e notamos x e y as aplicações suaves de \mathbb{C} em \mathbb{R} , que a cada complexo $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, associam respectivamente x e y .

a) Reparar que, com estas notações, as formas diferenciais de grau 1 sobre $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, dx e dy são precisamente as referidas na nota no fim do exercício precedente e que se tem

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy.$$

Mostrar que dz e $d\bar{z}$ constituem uma base do espaço vectorial complexo de dimensão 2 $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ e que dz é uma base do subespaço $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ e $d\bar{z}$ é uma base do subespaço $L_{\mathbb{C}}(\bar{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$. Para cada $\xi \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$, dizer quais as componentes de ξ na base $dz, d\bar{z}$.

b) Dados um aberto U de \mathbb{C} e uma aplicação suave $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, nota-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = Df_z(e_1) = Df_z(1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = Df_z(e_2) = Df_z(i)$$

e definem-se aplicações suaves $\frac{\partial f}{\partial z}$ e $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, de U em \mathbb{C} , por

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) = \pi_+(Df_z)(1), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = \pi_-(Df_z)(1),$$

onde $Df_z \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ e

$$\pi_+: L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \rightarrow L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; \mathbb{C}), \quad \pi_-: L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \rightarrow L_{\mathbb{C}}(\overline{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$$

são as projecções associadas à soma directa

$$L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}; \mathbb{C}) = L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; \mathbb{C}) \oplus L_{\mathbb{C}}(\overline{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$$

(cf. o exercício II.1).

Mostrar que a aplicação f é *holomorfa* (no sentido que, para cada z , a aplicação linear real Df_z é mesmo uma aplicação linear complexa) se, e só se, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ e que f é *anti-holomorfa* (no sentido que, para cada z , Df_z é antilinear) se, e só se, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

Mostrar que se tem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ df &= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \end{aligned}$$

c) Mostrar que se tem $dz \wedge d\bar{z} = -2i dx \wedge dy$ e deduzir daqui que $dz \wedge d\bar{z}$ é uma base do espaço vectorial complexo $A_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{C}; \mathbb{C})$, de dimensão 1.

d) Mostrar que a forma diferencial ω , de grau 1, definida por $\omega_z = f(z) dz$, é fechada, isto é, verifica $d\omega = 0$, se, e só se, a aplicação f é holomorfa.

e) Quando a aplicação f é holomorfa, define-se $f'(z) = Df_z(1) \in \mathbb{C}$. Mostrar que se tem então $df_z = f'(z) dz$.

Ex III.4 Sejam U um aberto num sector de \mathbb{R}^3 e $f, g, h: U \rightarrow \mathbb{C}$ três aplicações suaves. Seja ω a fórmula diferencial de grau 2 sobre U , definida por

$$\omega_{(x,y,z)} = f(x, y, z) dy \wedge dz + g(x, y, z) dx \wedge dz + h(x, y, z) dx \wedge dy.$$

Mostrar que se tem

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Ex III.5 Seja ω a forma diferencial de grau 1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, definida por

$$\omega_{(x,y)} = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

a) Mostrar que se tem $d\omega = 0$.

b) Seja $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^2$ a semi-recta $[0, +\infty[\times \{0\}$ e seja $\alpha: \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow]0, 2\pi[$ a aplicação suave que a cada par (x, y) associa o seu argumento. Mostrar que $d\alpha$ é a restrição de ω a $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+$.

c) Por que razão a conclusão de b) pode explicar a de a)?

d) Mostrar que não existe nenhuma função $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $df = \omega$.
Sugestão: A restrição de uma tal função a $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+$ teria de diferir de α por uma constante.

Ex III.6 Sejam E e \widehat{E} espaços euclidianos, $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ variedades de dimensão m e $f: \widehat{M} \rightarrow M$ uma isometria suave, isto é, um difeomorfismo tal que, para cada $x \in \widehat{M}$, a aplicação linear $Df_x: T_x(\widehat{M}) \rightarrow T_{f(x)}(M)$, seja um isomorfismo ortogonal. Nas alíneas b) e seguintes supomos ainda que M e \widehat{M} estão suavemente orientadas e que o difeomorfismo f conserva as orientações.

a) Mostrar que, se $g: \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave, então

$$\text{grad}(g \circ f)_x = (Df_x)^{-1}(\text{grad}(g)_{f(x)}),$$

por outras palavras, os campos vectoriais $\text{grad}(g \circ f)$ e $\text{grad}(g)$ estão f -relacionados.

b) Supondo $m \geq 1$, sejam $X = (X_x)_{x \in \widehat{M}}$ e $Y = (Y_y)_{y \in M}$ campos vectoriais suaves f -relacionados, isto é, tais que $Y_{f(x)} = Df_x(X_x)$. Mostrar que, para cada $x \in \widehat{M}$, tem-se $\text{div}(Y)_{f(x)} = \text{div}(X)_x$.

c) Supondo $m \geq 1$, mostrar que, se $g: M \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação suave, então, para cada $x \in \widehat{M}$

$$\Delta(g \circ f)_x = \Delta g_{f(x)}.$$

d) Suponhamos que M e \widehat{M} têm dimensão 3. Mostrar que, se $X = (X_x)_{x \in \widehat{M}}$ e $Y = (Y_y)_{y \in M}$ são campos vectoriais f -relacionados, então os campos vectoriais $\text{rot}(X)$ e $\text{rot}(Y)$ são também f -relacionados.

Sugestão: Para as três últimas alíneas, ter em conta o resultado II.8.16.

Ex III.7 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada, e seja $Vol = (Vol_x)_{x \in M}$ a forma diferencial de grau m elemento de volume. Dado um campo vectorial suave $X = (X_x)_{x \in M}$, mostrar que tem lugar a seguinte fórmula para a divergência de X , que não faz intervir explicitamente os operadores $*$:

$$d \int_X (Vol) = \text{div}(X) Vol.$$

Sugestão: Ter em conta a alínea a) de II.8.18.

Ex III.8 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m . Dado um campo vectorial suave $X = (X_x)_{x \in M}$, como se poderia definir a divergência de X , $\text{div}(X): M \rightarrow \mathbb{R}$, de modo a generalizar a definição que apresentámos, no caso em que M estava suavemente orientada (cf. III.2.11)?

Sugestão: Raciocinar localmente, reparando que a divergência não se altera quando se troca a orientação em todos os pontos de uma variedade.

Ex III.9 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão 3, suavemente orientada. Mostrar que:

- a)** Para cada aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$;
b) Para cada campo vectorial suave $X = (X_x)_{x \in M}$, tem-se $\text{div}(\text{rot}(X)) = 0$.

Ex III.10 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade. Dadas as aplicações suaves $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$, mostrar que se tem

$$\text{grad}(fg) = f \text{grad}(g) + \text{grad}(f) g.$$

Ex III.11 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão 3, suavemente orientada. Consideremos uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave. Mostrar que se tem

$$\text{rot}(fX) = f \text{rot}(X) + \text{grad}(f) \times X.$$

Ex III.12 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada. Consideremos uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave. Mostrar que se tem

$$\text{div}(fX) = f \text{div}(X) + \langle \text{grad}(f), X \rangle.$$

Sugestão: Ter em conta o exercício II.35.

Ex III.13 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada. Sejam $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ duas aplicações suaves. Mostrar que se tem

$$\Delta(fg) = f(\Delta g) + (\Delta f)g + 2\langle \text{grad}(f), \text{grad}(g) \rangle.$$

Ex III.14 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão 3, suavemente orientada. Sejam $X = (X_x)_{x \in M}$ e $Y = (Y_x)_{x \in M}$ dois campos vectoriais suaves. Mostrar que se tem então

$$\text{div}(X \times Y) = \langle \text{rot}(X), Y \rangle - \langle X, \text{rot}(Y) \rangle.$$

Sugestão: Ter em conta o exercício II.35.

Ex III.15 Seja E um espaço euclidiano de dimensão $m \geq 1$, sobre o qual consideramos a norma associada, e seja $a \in E$ fixado.

a) Sendo $X = (X_x)_{x \in E}$ o campo vectorial suave definido por $X_x = x - a$, mostrar que se tem $\text{div}(X) = m$. Deduzir daqui que, sendo $Y = (Y_x)_{x \in E \setminus \{a\}}$ o campo vectorial suave definido por

$$Y_x = \frac{x - a}{\|x - a\|^m},$$

tem-se $\text{div}(Y)_x = 0$, para cada x .

b) Sendo $\varphi:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação suave, seja $f: E \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por

$$f(x) = \varphi(\|x - a\|).$$

Mostrar que se tem

$$\text{grad}(f)_x = \frac{\varphi'(\|x - a\|)}{\|x - a\|} (x - a),$$

$$\Delta f_x = \varphi''(\|x - a\|) + (m - 1) \frac{\varphi'(\|x - a\|)}{\|x - a\|}.$$

c) Chamam-se *funções harmónicas* as funções cujo laplaciano é identicamente nulo. Determinar as funções suaves $\varphi:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ para as quais a correspondente função $f: E \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida em b), é harmónica.

Ex III.16 Seja E um espaço euclidiano e seja $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada. Seja $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave. Mostrar que, se w_1, \dots, w_m é uma base ortonormada de $T_{x_0}(M)$, então

$$\text{div}(X)_{x_0} = \sum_{j=1}^m \langle DX_{x_0}(w_j), w_j \rangle.$$

Sugestão: Se necessário substituindo M por um aberto contendo x_0 , pode-se já supor que existem campos vectoriais suaves W_1, \dots, W_m tais que $W_{j_{x_0}} = w_j$ e que, para cada $x \in M$, os W_{j_x} constituam uma base ortonormada directa de $T_x(M)$. Começar por demonstrar o resultado no caso particular em que X é um dos campos vectoriais W_k , utilizando para isso a segunda caracterização da derivada exterior em III.2.2. Passar ao caso geral por linearidade e utilizando o exercício III.12.

Ex III.17 Sejam $M \subset E$ uma variedade sem bordo, $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave e $\omega: \Omega \rightarrow M$ o respectivo *fluxo*. Recordemos que Ω é um aberto de $\mathbb{R} \times M$ e que, para cada $x \in M$, $J_x = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in \Omega\}$ é um intervalo aberto contendo 0 e que a aplicação

$$J_x \rightarrow M, \quad t \mapsto \omega(t, x),$$

é a solução máxima da equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(t, x) = X_{\omega(t, x)},$$

com a condição inicial $\omega(0, x) = x$. Para cada $s \in \mathbb{R}$, seja U_s o aberto de M constituído pelos x tais que $(s, x) \in \Omega$ e seja $\varphi_s: U_s \rightarrow U_{-s}$ o difeomorfismo definido por $\varphi_s(x) = \omega(s, x)$. Seja $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ um campo tensorial suave de grau p , real ou complexo.

a) Mostrar que se tem, para cada $x \in M$,

$$\mathcal{L}_X(\xi)_x = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\varphi_s^*(\xi_{U_{-s}}))_x - \xi_x}{s}.$$

Deduzir daqui que, se, qualquer que seja $s \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno,

$\varphi_s^*(\xi/U_{-s}) = \xi/U_x$, então $\mathcal{L}_X(\xi) = 0$.

Sugestão: Começar por notar que basta fazer a demonstração no caso em que M é um aberto de E . Nesse caso verificar que o segundo membro, aplicado a (u_1, \dots, u_p) , é igual a $g'(0)$, onde

$$\begin{aligned} g(s) &= \xi_{\varphi_s(x)}(D\varphi_{s,x}(u_1), \dots, D\varphi_{s,x}(u_p)) = \\ &= \xi_{\omega(s,x)}(D\omega_{(s,x)}(0, u_1), \dots, D\omega_{(s,x)}(0, u_p)), \end{aligned}$$

lembrando que $D^2\omega_{(0,x)}$ é uma aplicação bilinear simétrica e que se tem $D\omega_{(0,x)}(1, 0) = X_{x'}$.

b) Mostrar que se tem, mais geralmente, para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que $(t, x) \in \Omega$,

$$\varphi_t^*(\mathcal{L}_X(\xi)/U_{-t})_x = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\varphi_{s+t}^*(\xi/U_{-s-t}))_x - (\varphi_t^*(\xi/U_{-t}))_x}{s}$$

e deduzir daqui que, se $\mathcal{L}_X(\xi) = 0$, então, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t^*(\xi/U_{-t}) = \xi/U_t$.

Sugestão: Aplicar a alínea anterior com $\varphi_t(x)$ no lugar de x e aplicar em seguida $D\varphi_{t,x}^*$ a ambos os membros, atendendo a igualdades do tipo $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ (válida numa vizinhança aberta de x). Para a última afirmação, verificar que a aplicação g , referida na sugestão de a), tem derivada identicamente nula.

Nota: Nas condições anteriores suponhamos que o espaço ambiente E da variedade sem bordo M está munido de um produto interno e seja $\xi = (\xi_x)_{x \in M}$ o campo tensorial suave de grau 2, com valores em \mathbb{R} , em que, para cada $x \in M$, ξ_x é o produto interno de $T_x(M)$ induzido pelo de E . Aos campos vectoriais suaves X tais que $\mathcal{L}_X(\xi) = 0$ dá-se o nome de *campos vectoriais de Killing*. Tendo em conta o que vimos neste exercício, os campos vectoriais de Killing são caracterizados pela propriedade de cada difeomorfismo $\varphi_t: U_t \rightarrow U_{-t}$ ser uma isometria (ou seja, de cada isomorfismo $D\varphi_{t,x}: T_x(M) \rightarrow T_{\varphi_t(x)}(M)$ ser ortogonal).

Ex III.18 Sejam $M \subset E$ uma variedade e $X = (X_x)_{x \in M}$ e $Y = (Y_x)_{x \in M}$ dois campos vectoriais suaves sobre M . O parênteses de Lie $[X, Y]$ é por vezes também notado $\mathcal{L}_X(Y)$ e toma o nome de derivada de Lie de Y na direcção de X . Mostrar que, para cada aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, têm lugar os seguintes resultados correspondentes às conclusões de III.3.6:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX}(Y) &= f \mathcal{L}_X(Y) - Df(Y) X, \\ \mathcal{L}_X(fY) &= f \mathcal{L}_X(Y) + Df(X) Y. \end{aligned}$$

Ex III.19 a) Utilizar o corolário III.3.12 para demonstrar a *identidade de Jacobi*: Se X, Y e Z são campos vectoriais suaves sobre a variedade $M \subset E$, então

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Sugestão: Mostrar que, se W é um campo vectorial sobre M tal que, para cada aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $W \cdot f = 0$, então $W = 0$.

b) Mostrar que a conclusão da alínea a) pode ser também escrita, com a notação do exercício anterior, na forma

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}(Z) = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(Z)) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(Z)),$$

forma essa em que é claro um parentesco com a fórmula de III.3.11.

Ex III.20 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada e seja $Vol = (Vol_x)_{x \in M}$ a forma diferencial elemento de volume de M . Seja $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave. Mostrar que se tem

$$\mathcal{L}_X(Vol) = \operatorname{div}(X) Vol.$$

Sugestão: Ter em conta III.3.16 e o exercício III.7.

Nota: Supondo que a variedade M não tem bordo, podemos, para cada $t \in \mathbb{R}$, notar $\varphi_t: U_t \rightarrow U_{-t}$ o difeomorfismo definido a partir do fluxo de X , tal como no exercício III.17. Tendo em conta o que se viu nesse exercício, concluímos que se tem $\operatorname{div}(X) = 0$ se, e só se, $\varphi_t^*(Vol|_{U_{-t}}) = Vol|_{U_t}$. Uma vez que, como se verifica facilmente, por um argumento de continuidade, os difeomorfismos φ_t conservam as orientações, podemos concluir das observações precedentes que todo o campo vectorial de Killing tem divergência nula. Pode-se também verificar facilmente que a condição de se ter

$$\varphi_t^*(Vol|_{U_{-t}}) = Vol|_{U_t}$$

é equivalente à de exigir que cada isomorfismo $D\varphi_{t,x}: T_x(M) \rightarrow T_{\varphi_t(x)}(M)$ tenha coeficiente de dilatação igual a 1, condição que se pode verificar, por um argumento de teoria da medida, ser equivalente à de se ter $\mu_M(\varphi_t(A)) = \mu_M(A)$, para cada boreliano $A \subset U_t$, o que nos dá uma nova interpretação geométrica da condição de um campo vectorial X verificar $\operatorname{div}(X) = 0$.

Ex III.21 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão 3, suavemente orientada. Sejam $X = (X_x)_{x \in M}$ e $Y = (Y_x)_{x \in M}$ dois campos vectoriais suaves. Mostrar que se tem

$$\operatorname{rot}(X \times Y) = \operatorname{div}(Y) X - \operatorname{div}(X) Y - [X, Y].$$

Sugestão: Partir da identidade

$$\theta(\operatorname{rot}(X \times Y)) = *d(\theta(X \times Y)) = *d*(\theta(X) \wedge \theta(Y)),$$

e atender às igualdades já conhecidas

$$\begin{aligned} *(\omega \wedge \theta(Y)) &= \operatorname{int}_Y(*\omega), & d \operatorname{int}_Y(\omega) &= \mathcal{L}_Y(d\omega) - \operatorname{int}_Y(d\omega), \\ *\theta(X) &= \operatorname{int}_X(Vol), & d*\theta(X) &= \operatorname{div}(X) Vol, \\ \mathcal{L}_Y(Vol) &= \operatorname{div}(Y) Vol, & \mathcal{L}_Y(\operatorname{int}_X(Vol)) &= \operatorname{int}_X(\mathcal{L}_Y(Vol)) + \operatorname{int}_{[Y,X]}(Vol). \end{aligned}$$

Ex III.22 Verificar o que afirma o teorema de Stokes no caso em que a variedade M , com dimensão 1, é um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ ou um intervalo do tipo $[a, +\infty[$.

Ex III.23 Seja $B \subset E$ uma variedade compacta, de dimensão 1, suavemente orientada. Mostrar que $\partial_1(B)$ é constituído por um número par de pontos, havendo tantos pontos em $\partial_1(B)$ onde a orientação induzida é a canónica como pontos em que a orientação induzida é a não canónica.

Sugestão: Considerar a aplicação $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ de valor constante 1 e aplicar o teorema de Stokes.

Ex III.24 Mostrar que o seguinte *Teorema de Green* no plano é uma consequência do teorema de Stokes: Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$ duas aplicações suaves. Dada uma variedade compacta de dimensão 2, $M \subset U$, tem-se

$$\int_{\partial_1(M)} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_M \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy,$$

em que o integral do primeiro membro é o de uma forma diferencial e o do segundo é o de uma função para a medida de Lebesgue.

Ex III.25 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$. Seja, para cada $x \in \partial_1(M)$, F_x o complementar ortogonal de $T_x(\partial_1(M))$ em $T_x(M)$.

a) Mostrar que a família dos F_x é um fibrado vectorial de dimensão 1 de base $\partial_1(M)$ e que este fibrado vectorial fica suavemente orientado pela condição de $w \in F_x$ ser uma base directa se, e só se, $w \notin t_x(M)$. **Sugestão:** Relacionar a projecção ortogonal de E sobre F_x com as projecções ortogonais de E sobre $T_x(M)$ e $T_x(\partial_1(M))$.

b) Deduzir de a) que tem lugar uma secção suave do referido fibrado que a cada $x \in \partial_1(M)$ associa a normal unitária exterior Z_x .

Ex III.26 Mostrar que, nas condições de III.6.3, são suaves as aplicações de M' em E , que a x associa a normal unitária positiva Z_x , e de $\partial_1(M')$ em E , que a x associa a tangente unitária positiva W_x .

Ex III.27 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada, e seja, para cada $x \in \partial_1(M)$, Z_x a normal unitária exterior (cf. III.6.2). Dada uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{K}$, nula fora duma parte compacta K de M , mostrar que se tem

$$\int_M \Delta f_x d\mu_M(x) = \int_{\partial_1(M)} Df_x(Z_x) d\mu_{\partial_1(M)}(x)$$

(a função integranda do segundo membro costuma ser chamada de *derivada normal* de f e ser notada $\frac{\partial f}{\partial n}(x)$). **Sugestão:** No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o resul-

tado é uma consequência trivial do teorema da divergência. No caso geral, considerar a parte real e a parte imaginária de f .

Ex III.28 (Fórmula de Green) Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $m \geq 1$, suavemente orientada, e seja, para cada $x \in \partial_1(M)$, Z_x a normal unitária exterior (cf. III.6.2).

a) Dadas duas aplicações suaves $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$, uma das quais nula fora duma certa parte compacta K de M , mostrar que se tem

$$\int_M f_x \Delta g_x - \Delta f_x g_x d\mu_M(x) = \int_{\partial_1(M)} f_x Dg_x(Z_x) - Df_x(Z_x) g_x d\mu_{\partial_1(M)}(x).$$

Sugestão: Aplicar o teorema da divergência ao campo vectorial

$$f \operatorname{grad}(g) - g \operatorname{grad}(f),$$

tendo em conta o exercício II.13.

b) Generalizar a conclusão de a) ao caso em que f e g podem tomar valores em \mathbb{C} .

Ex III.29 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $m \geq 1$, $U \subset E$ um conjunto aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{K}$ uma *função harmónica*, isto é, uma aplicação suave tal que $\Delta f_x = 0$, para cada $x \in U$.

Para cada $a \in E$ e $t > 0$, notemos

$$\begin{aligned} \overline{B}_t(a) &= \{x \in E \mid \|x - a\| \leq t\}, \\ S_t(a) &= \{x \in E \mid \|x - a\| = t\} \end{aligned}$$

(a bola fechada e a hipersuperfície esférica de centro a e raio t).

a) Para cada $a \in U$ e cada $t > 0$, tal que $\overline{B}_t(a) \subset U$, seja

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^{m-1}} \int_{S_t(a)} f(x) d\mu_{S_t(a)}(x) \in \mathbb{K}.$$

Mostrar que se tem $\varphi'(t) = 0$. **Sugestão:** Fazer uma mudança de variáveis para reduzir os integrais sobre $S_t(a)$ a integrais sobre $S_1(0)$, utilizar o teorema de derivação do integral paramétrico, regressar a $S_t(a)$ com uma nova mudança de variáveis e ter em conta o exercício III.27.

b) Utilizar a alínea anterior para provar a *primeira propriedade da média* das funções harmónicas: Se $r > 0$ é tal que $\overline{B}_r(a) \subset U$, então $f(a)$ é a média de f sobre $S_r(a)$, isto é,

$$f(a) = \frac{1}{\mu_{S_r(a)}(S_r(a))} \int_{S_r(a)} f(x) d\mu_{S_r(a)}(x).$$

c) Utilizar a alínea b) para provar a *segunda propriedade da média* das funções harmónicas: Se $r > 0$ é tal que $\overline{B}_r(a) \subset U$, então $f(a)$ é a média de

f sobre $\overline{B}_r(a)$, isto é,

$$f(a) = \frac{1}{\mu_E(\overline{B}_r(a))} \int_{\overline{B}_r(a)} f(x) d\mu_E(x).$$

Ex III.30 Seja E um espaço euclidiano de dimensão $m \geq 1$, sobre o qual consideramos a norma associada. Seja $a \in E$ e notemos $f_a: E \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação que se anula em a e que nos pontos de $E \setminus \{a\}$ está definida por

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(m-2)\sigma_{m-1}\|x-a\|^{m-2}}, & \text{se } m \neq 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln(\|x-a\|), & \text{se } m = 2 \end{cases}$$

onde σ_{m-1} é a medida da hipersuperfície esférica unitária de E .

a) Mostrar que f_a é uma função localmente integrável e que a restrição de f_a a $E \setminus \{a\}$ é harmónica (cf. o exercício III.15).

b) Mostrar que, para cada função suave de suporte compacto $\varphi: E \rightarrow \mathbb{C}$, tem-se

$$\int_E f_a(x) \Delta \varphi_x d\mu_E(x) = \varphi(a),$$

conclusão que se pode exprimir dizendo que o laplaciano de f_a no sentido das distribuições é igual à distribuição de Dirac centrada em a .

Sugestão: Aplicar a fórmula de Green, estabelecida no exercício III.28, à variedade $E \setminus B_r(a)$ (onde $B_r(a)$ é a bola aberta de centro a e raio r) e fazer em seguida r tender para 0.

Ex III.31 Seja E um espaço euclidiano de dimensão $m \geq 1$, sobre o qual consideramos a norma associada. Seja $M \subset E$ uma variedade compacta de dimensão m e notemos, para cada $x \in \partial_1(M)$, Z_x a normal unitária exterior. Mostrar que, se $a \notin M$, então

$$\int_{\partial_1(M)} \frac{\langle Z_x, x-a \rangle}{\|x-a\|^m} d\mu_{\partial_1(M)}(x) = 0$$

e que, se $a \in \partial_0(M)$,

$$\int_{\partial_1(M)} \frac{\langle Z_x, x-a \rangle}{\|x-a\|^m} d\mu_{\partial_1(M)}(x) = \sigma_{m-1}.$$

Sugestão: Aplicar o teorema da divergência, isolando, no segundo caso, o ponto a por uma pequena bola de centro a .

Ex III.32 (**Uma versão da fórmula integral de Cauchy**) Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Seja $M \subset U$ uma variedade compacta de dimensão 2, sobre a qual se considera a orientação correspondente à orientação canónica de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, e considere-se no bordo $\partial_1(M)$ a orientação induzida. Utilizar o teorema de Stokes para mostrar que:

a) Se $a \in \mathbb{C} \setminus M$, então

$$\int_{\partial_1(M)} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$

b) Se $a \in \partial_0(M)$, então

$$\int_{\partial_1(M)} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

Sugestão: A aplicação $g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$ é holomorfa em $U \setminus \{a\}$. Para a alínea b) convirá retirar à variedade M uma bola aberta de centro a e raio r e fazer em seguida r tender para 0.

Ex III.33 Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação suave. Seja $M \subset U$ uma variedade compacta de dimensão 2, sobre a qual se considera a orientação correspondente à orientação canónica de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, e considere-se no bordo $\partial_1(M)$ a orientação induzida.

a) Mostrar que, com as notações do exercício III.3, tem-se

$$\int_{\partial_1(M)} f(z) dz = 2i \int_M \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y) dx dy.$$

Sugestão: Ter em conta as conclusões das diferentes alíneas do referido exercício.

b) Sendo $a \in \partial_0(M)$, mostrar que tem lugar a seguinte fórmula integral de Cauchy, que generaliza a obtida na alínea b) do exercício anterior,

$$\int_{\partial_1(M)} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2i \int_M \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dx dy = 2\pi i f(a),$$

Sugestão: A mesma que para a alínea b) do exercício anterior, reparando que, sendo $g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$, tem-se $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{z-a} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$.

Ex III.34 Relembrando a possibilidade de definir a divergência de um campo vectorial suave cujo domínio seja uma variedade não obrigatoriamente orientada (cf. o exercício III.8), enunciar e demonstrar uma versão do teorema da divergência (cf. III.6.2) no quadro das variedades não orientadas.

Ex III.35 Dadas as variedades $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$, mostrar que a relação entre aplicações suaves de \widehat{M} em M , definida por $f \sim g$, se, e só se, f e g são suavemente homotópicas, é uma relação de equivalência. **Sugestão:** Para a transitividade, e no sentido de arredondar os cantos, trabalhar com uma aplicação suave $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\alpha(t) = 0$, sempre que $t \leq \frac{1}{3}$, e que $\alpha(t) = 1$, sempre que $t \geq \frac{2}{3}$. Para construir uma tal função utilizar a técnica das partições da unidade.

Ex III.36 Seja $M \subset E$ uma variedade suavemente contráctil. Mostrar que, se $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ é uma variedade e se $f, g: \widehat{M} \rightarrow M$ são aplicações suaves arbitrárias, então f e g são suavemente homotópicas. **Sugestão:** As duas aplicações vão ser suavemente homotópicas a uma mesma aplicação constante.

Ex III.37 Mostrar que, se $M \subset E$ é uma variedade suavemente contráctil, então M é conexa por arcos suaves.

Ex III.38 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão 3, suavemente orientada. Supondo que M é suavemente contráctil, mostrar que:

a) Se $X = (X_x)_{x \in M}$ é um campo vectorial suave sobre M tal que $\text{rot}(X) = 0$, então existe uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, para a qual $X = \text{grad}(f)$;

b) Se $X = (X_x)_{x \in M}$ é um campo vectorial suave sobre M tal que $\text{div}(X) = 0$, então existe um campo vectorial suave $Y = (Y_x)_{x \in M}$, tal que $X = \text{rot}(Y)$.

Ex III.39 Seja E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$ e notemos \mathbb{R}_+ o intervalo $[0, +\infty[$ e $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

a) Dado $x \in E \setminus \{0\}$, mostrar que o complementar $E \setminus \mathbb{R}_+x$ da semirecta gerada por x é suavemente contráctil. **Sugestão:** Este conjunto é estrelado relativamente a $-x$.

b) Dado $x \in S$, mostrar que $S \setminus \{x\}$ é suavemente contráctil.

Sugestão: Projectar sobre S a restrição da homotopia que se considera em a).

c) Dado $x \in S$, e sendo F o subespaço vectorial de dimensão $n - 1$ de E , constituído pelos vectores ortogonais a x , mostrar que existe um difeomorfismo $f: S \setminus \{x\} \rightarrow F$ (a *projectão estereográfica*), definido por

$$f(y) = \frac{-\langle y, x \rangle}{1 - \langle y, x \rangle} x + \frac{1}{1 - \langle y, x \rangle} y,$$

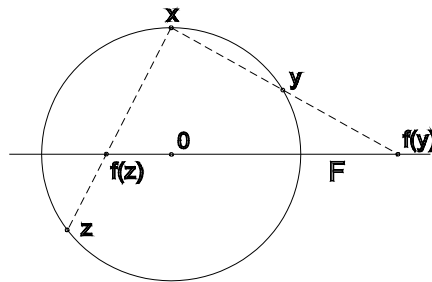


Figura 8

deduzindo daí, mais uma vez, o facto de a variedade $S \setminus \{x\}$ ser suavemente contráctil.

Ex III.40 (Um rotacional alternativo)

a) Sejam F é um espaço euclidiano e $L_{-aa}(F; F)$ é o espaço vectorial das aplicações lineares anti-autoadjuntas de F em F . Mostrar que existe um isomorfismo $\gamma: L_{-aa}(F; F) \rightarrow A^2(F; \mathbb{R})$, definido por $\gamma(\lambda)(x, y) = \langle \lambda(x), y \rangle$.

b) Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão arbitrária, não obrigatoriamente orientada. Seja $X = (X_x)_{x \in M}$ um campo vectorial suave sobre M . Podemos então considerar a forma diferencial suave $\theta(X)$, de grau 1, e o respectivo diferencial exterior, a forma diferencial suave de grau 2 $d\theta(X)$. Para cada $x \in M$, vamos definir o *rotacional alternativo* de X , $\overline{\text{rot}}(X)_x$ (a definição e a notação são não *standard*) como sendo a aplicação linear anti-autoadjunta de $T_x(M)$ em $T_x(M)$ definida por

$$\overline{\text{rot}}(X)_x = \gamma^{-1}(d\theta(X)_x).$$

Mostrar que:

b₁) Se existe uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $X = \text{grad}(f)$, então $\overline{\text{rot}}(X) = 0$;

b₂) Se a variedade M é suavemente contráctil e se $\overline{\text{rot}}(X) = 0$, então existe uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $X = \text{grad}(f)$.

c) Se E é um espaço euclidiano, $M \subset E$ é uma variedade e $X = (X_x)_{x \in M}$ é um campo vectorial suave, define-se, para cada $x \in M$, a *derivada covariante* de X no ponto x como sendo a aplicação linear $\nabla X_x: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$ definida por $\nabla X_x(u) = \pi_x(DX_x(u))$, onde $\pi_x: E \rightarrow T_x(M)$ é a projecção ortogonal. Mostrar que o rotacional alternativo de X , definido na alínea precedente, é dado por

$$\overline{\text{rot}}(X)_x = \nabla(X)_x - \nabla(X)_x^*.$$
³⁷

Deduzir que, no caso em que M é suavemente contráctil, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma aplicação suave $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $X = \text{grad}(f)$ é que a aplicação linear $\nabla X_x: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$ seja autoadjunta, para cada $x \in M$.

d) No caso em que F é um espaço euclidiano de dimensão arbitrária, não obrigatoriamente orientado, pode-se definir analogamente, para $x, y \in F$, um *produto externo alternativo* $x \overline{\times} y \in L_{-aa}(F; F)$, pela igualdade

$$x \overline{\times} y = \gamma^{-1}(\theta(X) \wedge \theta(Y)).$$

Mostrar que se tem

$$x \overline{\times} y(z) = \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x.$$

e) No caso em que F é um espaço euclidiano orientado de dimensão 3, mostrar que tem lugar um isomorfismo $ad: F \rightarrow L_{-aa}(F; F)$, que a cada $x \in F$ associa o elemento $ad_x \in L_{-aa}(F; F)$ definido pela condição de se ter

³⁷Estamos a notar λ^* a aplicação linear adjunta de uma aplicação linear $\lambda: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$.

$$\langle ad_x(y), z \rangle = Vol_F(x, y, z),$$

quaisquer que sejam $y, z \in F$, ou, equivalentemente,

$$ad_x(y) = x \times y,$$

onde \times nota o produto externo usual em F .

Mostrar que este isomorfismo permite relacionar naturalmente o produto externo usual com o produto externo alternativo e o rotacional usual com o rotacional alternativo.

Deduzir as fórmulas

$$ad_{x \times y} = ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x = x \overline{\times} y$$

(cf. o exercício II.32) assim como, no quadro das variedades de dimensão 3 suavemente orientadas,

$$\begin{aligned} \nabla X_x(v) - \nabla X_x^*(v) &= \text{rot}(X)_x \times v, \\ \langle \nabla X_x(v), w \rangle - \langle \nabla X_x(w), v \rangle &= Vol(\text{rot}(X)_x, v, w), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $v, w \in T_x(M)$ e o campo vectorial suave X , esta última fórmula podendo ser escrita de modo equivalente,

$$\langle DX_x(v), w \rangle - \langle DX_x(w), v \rangle = Vol(\text{rot}(X)_x, v, w),$$

o que está no mesmo espírito da caracterização da divergência encontrada no exercício III.16.

Ex III.41 (Complementos ao teorema de aproximação por aplicações suaves)

Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita, o segundo dos quais munido de uma norma.

a) Verificar que, adaptando trivialmente a demonstração de III.8.5, se pode obter a seguinte generalização desse resultado:

Sejam $U \subset E$ um conjunto aberto (por exemplo $U = E \dots$), $M \subset U$ um subconjunto fechado em U , $C \subset F$ um subconjunto convexo não vazio (por exemplo $C = F \dots$), $f: M \rightarrow F$ uma aplicação contínua, tal que $f(M) \subset C$, e $\delta: M \rightarrow]0, +\infty[$ uma aplicação contínua (por exemplo, uma constante...). Existe então uma aplicação suave $g: U \rightarrow F$ tal que $g(U) \subset C$ e que, para cada $x \in M$, $\|g(x) - f(x)\| < \delta(x)$.

Sugestão: Por translação, reduzir o resultado ao caso em que $0 \in C$.

b) Concluir de a) que, se $M \subset E$ é uma variedade, eventualmente com bordo, e se $f: M \rightarrow F$ é uma aplicação contínua, então, para cada $\delta > 0$, existe uma aplicação suave $g: M \rightarrow F$ tal que, para cada $x \in M$, $\|g(x) - f(x)\| < \delta$.

Sugestão: Atender a que toda a variedade $M \subset E$ é um espaço topológico localmente compacto e deduzir daí que M se pode escrever como intersecção de um aberto de E com um fechado de E (este último igual à aderência de M em E).

c) Utilizar a conclusão de a) para mostrar que, se $C \subset F$ é um conjunto

convexo e fechado e se $f: C \rightarrow C$ é uma aplicação contínua sem ponto fixo (isto é, tal que $f(x) \neq x$, para todo o x), então existe uma aplicação suave sem ponto fixo $g: C \rightarrow C$. **Sugestão:** Tomar $\delta(x) = \|f(x) - x\|$.

Ex III.42 **a)** Sejam X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto tais que exista um espaço euclidiano E , com a bola $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ e a hipersuperfície esférica $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$, e um homeomorfismo $\varphi: X \rightarrow B$, com $\varphi(Y) = S$ (pode-se dizer que (X, Y) é um *par bola-esfera topológico*). Mostrar que não existe nenhuma retracção contínua de X sobre Y .

b) Seja E um espaço vectorial de dimensão finita, munido de uma norma, notada $\|\cdot\|'$, não obrigatoriamente proveniente dum produto interno, e notemos

$$\begin{aligned} B' &= \{x \in E \mid \|x\|' \leq 1\}, \\ S' &= \{x \in E \mid \|x\|' = 1\}. \end{aligned}$$

Mostrar que (B', S') é um par bola-esfera topológico.

Sugestão: Considerando em E uma norma $\|\cdot\|$, proveniente dum produto interno, com os correspondentes

$$\begin{aligned} B &= \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}, \\ S &= \{x \in E \mid \|x\| = 1\}, \end{aligned}$$

mostrar que existe um homeomorfismo $f: E \rightarrow E$, aplicando B' sobre B e S' sobre S , definido por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|' x}{\|x\|}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Ex III.43 Demonstrar, sem utilizar o teorema da não existência de retracção da bola sobre a esfera, a seguinte versão suave do teorema do ponto fixo de Brouwer (cf. III.8.8): Sendo E um espaço euclidiano e $f: B \rightarrow B$ uma aplicação suave, onde $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$, existe $x \in B$ tal que $f(x) = x$.

Sugestão: Supondo que isso não acontecia, considerar

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$$

e mostrar que se pode considerar uma aplicação suave $H: [0, 1] \times S \rightarrow S$, definida por

$$H(t, x) = \frac{x - tf(x)}{\|x - tf(x)\|},$$

a qual vai ser uma homotopia de Id_S para a aplicação $g: S \rightarrow S$, definida por

$$g(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}.$$

Sendo Vol a forma diferencial elemento de volume de S , utilizar III.7.6 e o teorema de Stokes para a variedade sem bordo S , para deduzir que

$$\mu_S(S) = \int_S g^* Vol;$$

reparando que g é a restrição de uma aplicação suave $\bar{g}: B \rightarrow S$, definida pela mesma fórmula, utilizar mais uma vez o teorema de Stokes, para a variedade B com bordo S , para deduzir que

$$\int_S g^* Vol = \int_S \bar{g}^* Vol = 0,$$

pelo que se foi conduzido a um absurdo.

Ex III.44 Mostrar que a conclusão de III.8.4 (não existência de retracção suave da bola sobre a esfera) pode ser deduzida directamente da conclusão do exercício anterior. **Sugestão:** Se f fosse uma retracção suave de B sobre S , o que aconteceria à aplicação suave $g: B \rightarrow B$, definida por $g(x) = f(-x)$?

Ex III.45 Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação suave e consideremos a forma diferencial suave ω , de grau 1, definida por $\omega_z = f(z) dz$ (cf. o exercício III.3). Dados $a < b$ em \mathbb{R} e a aplicação suave $\gamma: [a, b] \rightarrow U$, mostrar que o integral de ω sobre a variedade singular $([a, b], \gamma)$ é dado por

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

pelo que não é mais do que o que em Análise Complexa é notado

$$\int_\gamma f(z) dz.$$

Ex III.46 a) Nas condições de III.9.11, mostrar que, se a forma diferencial ω fosse exacta, então

$$\int_f \omega = 0,$$

pelo que a conclusão desse resultado era trivial.

b) Nas condições de III.9.12, mostrar que, se a forma diferencial ω fosse exacta, então o integral de ω sobre a variedade singular (A, f) só dependia da restrição de f ao bordo $\partial_1(A)$, pelo que a conclusão desse resultado era trivial.

Ex III.47 Apresentar uma nova demonstração de III.9.12, sem utilizar o operador prismático, seguindo o seguinte caminho:

a) Considerar sobre a variedade compacta $[0, 1] \times A$, de dimensão $n + 1$, a orientação que associa a cada espaço vectorial tangente

$$T_{(t,x)}([0, 1] \times A) = \mathbb{R} \times T_x(A)$$

a orientação produto da orientação canónica de \mathbb{R} pela orientação dada de $T_x(A)$.

b) Aplicar o teorema de Stokes à forma diferencial $H^*\omega$, de grau n sobre $[0, 1] \times A$.

c) Verificar que os integrais das restrições de $H^*\omega$ às subvariedades abertas de $\partial_1([0, 1] \times A)$, $\{0\} \times \partial_0(A)$ e $\{1\} \times \partial_0(A)$, com a orientação induzida no bordo, são iguais respectivamente a $-\int_f \omega$ e $\int_g \omega$.

d) Verificar que o integral da restrição de $H^*\omega$ à subvariedade aberta $]0, 1[\times \partial_1(A)$ de $\partial_1([0, 1] \times A)$, com a orientação induzida no bordo, é nulo.

Ex III.48 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$, seja S a respectiva hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1 e seja $\rho: E \setminus \{0\} \rightarrow S$ a aplicação suave definida por $\rho(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Seja $A \subset E \setminus \{0\}$ uma variedade sem bordo tal que $\rho|_A$ seja um homeomorfismo de A sobre um subconjunto B de S . Mostrar que $\rho|_A$ é um difeomorfismo de A sobre B se, e só se, para cada $x \in A$, $x \notin T_x(A)$. **Sugestão:** Verificar que esta condição é equivalente à de exigir que a restrição de $D\rho_x$ a $T_x(A)$ seja injectiva.

Ex III.49 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e consideremos sobre $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ a orientação que lhe vem de ser bordo da bola fechada $\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$. Notemos Vol_E o elemento de volume de E e Vol_S a forma diferencial elemento de volume da variedade S . Seja $\Omega: E \setminus \{0\} \rightarrow A^{n-1}(E; \mathbb{R})$ a forma diferencial ângulo sólido.

a) Mostrar que, para cada $y \in S$ e $w_1, \dots, w_{n-1} \in T_y(S)$, tem-se

$$Vol_{S_y}(w_1, \dots, w_{n-1}) = Vol_E(y, w_1, \dots, w_{n-1}).$$

b) Mostrar que, para cada $x \in E \setminus \{0\}$ e $z_1, \dots, z_{n-1} \in E$, tem-se

$$\Omega_x(z_1, \dots, z_{n-1}) = \frac{1}{\|x\|^n} Vol_E(x, z_1, \dots, z_{n-1}).$$

c) No caso particular em que $E = \mathbb{R}^n$, com o produto interno e orientação usuais, mostrar que, notando, como é usual, dx_1, \dots, dx_n a base de $A^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ associada à base canónica de \mathbb{R}^n , sai, para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\Omega_x = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{x_j}{(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2})^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Aproveitar este resultado para reconhecer a forma diferencial sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ referida no exercício III.5.

Ex III.50 Sejam E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$, S a respectiva hipersuperfície esférica unitária de centro 0, Ω a forma diferencial ângulo sólido em $E \setminus \{0\}$ e $\rho: E \setminus \{0\} \rightarrow S$ a projecção, definida por $\rho(x) = x/\|x\|$. Seja A uma variedade de dimensão $n - 1$, suavemente orientada.

a) Se $f: A \rightarrow S$ é uma aplicação suave, mostrar que f tem ângulo sólido se, e só se, a forma diferencial, de grau $n - 1$, Vol_S for integrável em (A, f) e que, nesse caso, $\angle f = \int_{(A, f)} Vol_S$.

b) Se $f: A \rightarrow E \setminus \{0\}$ é uma aplicação suave, mostrar que f tem ângulo sólido se, e só se $\rho \circ f: A \rightarrow S$ tem ângulo sólido e que, nesse caso, $\angle f = \angle(\rho \circ f)$.

Ex III.51 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e seja $A \subset E$ uma variedade de dimensão $n - 1$, suavemente orientada, tal que $0 \notin A$. Para cada $x \in A$ seja Z_x a normal unitária positiva, isto é, o único vector de E ortogonal a $T_x(A)$, de norma 1 e tal que a orientação induzida em $T_x(A)$, pela orientação de E e pela orientação transversa definida por Z_x , seja a orientação dada. Mostrar que A tem ângulo sólido se, e só se, a aplicação de A em \mathbb{R} , que a x associa $\frac{1}{\|x\|^n} \langle Z_x, x \rangle$, é integrável para a medida μ_A e que, nesse caso,

$$\angle(A) = \int_A \frac{1}{\|x\|^n} \langle Z_x, x \rangle d\mu_A(x).$$

Utilizar esta conclusão para reinterpretar a conclusão do exercício III.31, à luz de III.9.21. **Sugestão:** Utilizar a caracterização de Ω_x dada na alínea b) do exercício III.49.

Ex III.52 No caso em que E é um espaço euclidiano orientado de dimensão 1, explicitar o que é o ângulo sólido orientado de uma variedade singular compacta de dimensão 0, (A, f) , onde f é uma aplicação de A em $E \setminus \{0\}$.

Ex III.53 Consideremos em \mathbb{C} o seu produto interno e a sua orientação canónicos ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$).

a) Mostrar que a forma diferencial ângulo sólido

$$\Omega: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow A^1(\mathbb{C}; \mathbb{R})$$

está definida por

$$\Omega_z(w) = \Im\left(\frac{w}{z}\right).$$

onde $\Im(w)$ denota a parte imaginária de um número complexo w .

Sugestão: Utilizar a caracterização de Ω dada na alínea b) do exercício III.49.

b) Mostrar que, se A é uma variedade compacta e suavemente orientada, de dimensão 1, e se $f: A \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é uma aplicação suave, então o ângulo sólido orientado de f é dado por

$$\angle(f) = \Im\left(\int_{(A,f)} \frac{1}{z} dz\right).$$

c) Sendo $\varphi: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por

$$\varphi(z) = \log(|z|),$$

mostrar que se tem

$$d\varphi_z(w) = \Re\left(\frac{w}{z}\right).$$

Deduzir daqui que, se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é uma aplicação suave, tem-se

$$\int_f \frac{1}{z} dz = \log\left(\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|\right) + i \angle(f).$$

Ex III.54 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 2$, seja A uma variedade compacta, suavemente orientada, de dimensão $n - 1$, e seja $f: A \rightarrow E \setminus \{0\}$ uma aplicação suave, cuja restrição a $\partial_1(A)$ seja constante e tal que, para um certo $y \in E \setminus \{0\}$, $f(A) \subset E \setminus (\mathbb{R}_+y)$ (ou seja, tal que $\rho \circ f: A \rightarrow S$ não seja sobrejectiva). Mostrar que se tem então $\angle(f) = 0$. **Sugestão:** Tendo em conta o exercício III.39, deduzir a existência de uma forma diferencial ω , de grau $n - 2$, sobre $E \setminus (\mathbb{R}_+y)$, tal que $d\omega$ seja a restrição de Ω , aplicando em seguida o teorema de Stokes singular. No caso $n = 2$, lembrar o exercício III.23.

Ex III.55 (O teorema fundamental da Álgebra) Para cada $r > 0$, seja $S_r \subset \mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos de módulo r .

a) Sendo, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $f_n: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a aplicação suave definida por $f_n(z) = z^n$, verificar que $f_n^* \Omega = n \Omega$ e deduzir daí que, para cada $r > 0$, $\angle(f) = 2n\pi$.

b) Sejam $n \geq 1$ e $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial da forma

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

com os a_j números complexos. Mostrar que, para $r > 0$, suficientemente grande, f aplica S_r em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e a restrição de f a S_r é suavemente homotópica à restrição de f_n a S_r (enquanto aplicações $S_r \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$); deduzir daqui que $\angle(f|_{S_r}) = 2n\pi$ e, portanto, que existe $z \in \mathbb{C}$, com $|z| < r$, tal que $f(z) = 0$.

Ex III.56 (Integração ao longo de uma variedade singular parametrizada)

Sejam $M \subset E$ uma variedade e $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ uma forma diferencial suave de grau n , real ou complexa. Sejam $A \subset \hat{E}$ uma variedade compacta, suave-

mente orientada, de dimensão n , $B \subset \tilde{E}$ uma variedade e $f: A \times B \rightarrow M$ uma aplicação suave. Para cada $y \in B$, seja $f_y: A \rightarrow M$ a aplicação suave definida por $f_y(x) = f(x, y)$. Mostrar que tem lugar uma aplicação suave $g: B \rightarrow \mathbb{K}$, definida por

$$g(y) = \int_{(A, f_y)} \omega.$$

Sugestão: Mostrar que tem lugar uma aplicação suave $h: A \times B \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $(f_y^* \omega)_x = h(x, y) \text{Vol}_x$, aplicando em seguida o exercício I.17.

Ex III.57 (O ângulo sólido em torno dum ponto) Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Sendo A uma variedade suavemente orientada de dimensão $n - 1$ e $f: A \rightarrow E$ uma aplicação suave, diz-se que (A, f) tem *ângulo sólido em torno do ponto* $y \in E \setminus f(A)$ se, sendo $f_y: A \rightarrow E \setminus \{0\}$ a aplicação suave definida por $f_y(x) = f(x) - y$, (A, f_y) tem ângulo sólido; nesse caso, define-se o *ângulo sólido orientado* de (A, f) em torno de y , notado $\angle_y(A, f)$ ou, simplesmente, $\angle_y(f)$, como sendo o ângulo sólido orientado de (A, f_y) . No caso em que $A \subset E$ e $f: A \rightarrow E$ é a inclusão, usa-se também a notação $\angle_y(A)$ em vez de $\angle_y(A, f)$.

a) Supondo que a variedade A é compacta, utilizar o exercício anterior para deduzir que tem lugar uma aplicação suave de $E \setminus f(A)$ em \mathbb{R} , que a cada y associa $\angle_y(A, f)$.

b) Suponhamos que $n \geq 2$, que a variedade A é compacta e que a restrição de f a $\partial_1(A)$ é constante (é o que acontece, evidentemente, se a variedade A não tem bordo). Mostrar que a aplicação que a y associa $\angle_y(A, f)$ é constante sobre cada componente conexa do aberto $E \setminus f(A)$, sendo nula na componente conexa ilimitada deste aberto. **Sugestão:** Temos uma aplicação suave que toma valores num conjunto discreto. Ter também em conta o exercício III.54.

Ex III.58 (O que se passa quando atravessamos a variedade) Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e seja $A \subset E$ uma variedade compacta, sem bordo, de dimensão $n - 1$, suavemente orientada. Seja $a \in A$. Consideremos um aberto U de E , com $a \in U$, e uma aplicação suave $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $Df_a \neq 0$ e que $A \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$. Se necessário substituindo f por $-f$, pode-se já supor que a orientação de $T_a(A)$ é a induzida pela orientação de E e pela orientação transversa para a qual $\text{grad}(f)_a$ é um vector positivo. Se necessário reduzindo o aberto U , pode-se já supor que, para cada $x \in U$, $Df_x \neq 0$ e que, para cada $x \in U \cap A$, a orientação de $T_x(A)$ é a induzida pela de E e pela orientação transversa para a qual $\text{grad}(f)_x$ é um vector positivo.

a) Sendo $\delta = \|\text{grad}(f)_a\| > 0$, mostrar que se pode fixar $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta $B_\varepsilon(a)$ esteja contida em U , que, para cada $x \in B_\varepsilon(a)$,

$$\|\text{grad}(f)_x - \text{grad}(f)_a\| < \frac{\delta}{2}$$

e que, para cada $x \in B_\varepsilon(a) \cap A$, com $x \neq a$, exista $w \in T_a(A)$ com $\|w\| = 1$ e

$$\left\| \frac{x-a}{\|x-a\|} - w \right\| < \frac{1}{2},$$

deduzindo daqui que, sempre que $x \in B_\varepsilon(a) \cap A$, com $x \neq a$,

$$\begin{aligned} |\langle \text{grad}(f)_a, x-a \rangle| &< \frac{\delta}{2} \|x-a\|, \\ |\langle \text{grad}(f)_x, x-a \rangle| &< \delta \|x-a\|, \end{aligned}$$

onde $\text{grad}(f)_x \notin \mathbb{R}(x-a)$.

b) Sendo $\varepsilon > 0$ escolhido nas condições de a), mostrar que existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tal que, quaisquer que sejam $b, c \in B_{\varepsilon'}(a)$, tais que $f(b) < 0$ e $f(c) > 0$, se tenha

$$\angle_b(A) = \angle_c(A) + \sigma_{n-1}.$$

Sugestão: Fixar $0 < r < \varepsilon$. Mostrar que A fica união disjunta das duas subvariedades abertas de dimensão $n-1$,

$$A_0 = \{x \in A \mid \|x-a\| > r\}, \quad A_1 = \{x \in A \mid \|x-a\| < r\},$$

e do conjunto de medida μ_A nula $\{x \in A \mid \|x-a\| = r\}$.

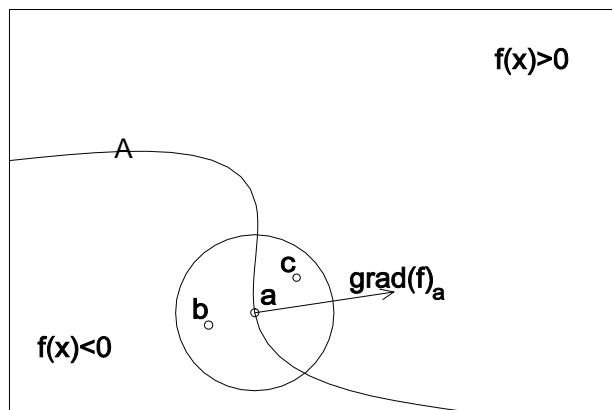


Figura 9

Considerar então a variedade compacta de dimensão n

$$B = \{x \in U \mid \|x-a\| \leq r, f(x) \leq 0\},$$

para a qual $\partial_1(B)$ é a união disjunta dos subconjuntos abertos A_1 e

$$B_0 = \{x \in U \mid \|x - a\| = r, f(x) < 0\}.$$

Tendo em conta III.9.21, mostrar que, se $b, c \in B_r(a)$ verificam $f(b) < 0$ e $f(c) > 0$, então $\angle_b(B_0) + \angle_b(A_1) = \sigma_{n-1}$ e que $\angle_c(B_0) + \angle_c(A_1) = 0$, donde

$$\begin{aligned}\angle_b(A) &= \angle_b(A_0) - \angle_b(B_0) + \sigma_{n-1}, \\ \angle_c(A) &= \angle_c(A_0) - \angle_c(B_0),\end{aligned}$$

e atender a que os primeiros membros são múltiplos inteiros de σ_{n-1} , assim como à continuidade em a da aplicação que a x associa

$$\angle_x(A_0) - \angle_x(B_0) = \angle_x(\widehat{A}_0) - \angle_x(\widehat{B}_0),$$

onde \widehat{A}_0 e \widehat{B}_0 são variedades compactas convenientes, que diferem de A_0 e de B_0 por conjuntos de medida nula.

c) Deduzir que o conjunto aberto $E \setminus A$ tem, pelo menos, duas componentes conexas.

Ex III.59 (O ângulo sólido de uma aplicação contínua) Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Seja A uma variedade compacta, suavemente orientada, de dimensão $n - 1$ e notemos $\partial(A)$ a união dos bordos $\partial_j(A)$, com $j \geq 1$, que é um subconjunto compacto de A (o complementar do aberto $\partial_0(A)$ de A). Seja $f: A \rightarrow E \setminus \{0\}$ uma aplicação contínua tal que $f|_{\partial(A)}: \partial(A) \rightarrow E \setminus \{0\}$ seja uma aplicação suave (esta última condição está automaticamente verificada se $n \leq 2$ ou se a variedade A não tem bordo). Mostrar que:

a) Existe uma aplicação suave $h: A \rightarrow E \setminus \{0\}$, tal que a restrição de h a $\partial(A)$ coincida com a de f e que, para cada $x \in A$, $\|h(x) - f(x)\| < \|f(x)\|$. **Sugestão:** Lembrar III.8.6.

b) Dadas duas aplicações suaves $h, \widehat{h}: A \rightarrow E \setminus \{0\}$, cujas restrições a $\partial(A)$ coincidam com a de f e tais que, para cada $x \in A$,

$$\|h(x) - f(x)\| < \|f(x)\|, \quad \|\widehat{h}(x) - f(x)\| < \|f(x)\|,$$

tem-se que $\angle(A, h) = \angle(A, \widehat{h})$. **Sugestão:** Definir

$$H(t, x) = (1 - t)h(x) + t\widehat{h}(x)$$

e ter em conta III.9.12.

Nota: Nas condições anteriores, define-se o *ângulo sólido orientado* de (A, f) , notado ainda $\angle(A, f)$ ou, simplesmente $\angle(f)$, como sendo igual a $\angle(A, h)$, qualquer que seja a aplicação suave $h: A \rightarrow E \setminus \{0\}$, cuja restrição a $\partial(A)$ coincida com a de f e tal que, para cada $x \in A$, se tenha $\|h(x) - f(x)\| < \|f(x)\|$. É claro que esta noção de ângulo sólido orientado generaliza a já conhecida no caso em que a aplicação f é suave.

Ex III.60 Sejam E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$ e $A \subset E$ uma variedade compacta, suavemente orientada, de dimensão $n - 1$. Sendo $f, g: A \rightarrow E \setminus \{0\}$ duas aplicações contínuas, com uma mesma restrição suave a $\partial(A)$, mostrar que $\angle(g) - \angle(f)$ é um múltiplo inteiro de σ_{n-1} . Além disso, se elas forem *continuamente homotópicas com bordo fixo*, isto é tais que exista uma aplicação contínua $H: [0, 1] \times A \rightarrow E \setminus \{0\}$, verificando $H(0, x) = f(x)$, $H(1, x) = g(x)$ e, para cada $t \in [0, 1]$ e $x \in \partial(A)$, $H(t, x) = f(x)$, mostrar que se tem mesmo $\angle(f) = \angle(g)$. **Sugestão:** Tendo em conta III.8.6, considerar uma aplicação suave $\hat{H}: [0, 1] \times A \rightarrow E \setminus \{0\}$, coincidindo com H em $[0, 1] \times \partial(A)$ e para a qual se verifique a condição $\|\hat{H}(t, x) - H(t, x)\| < \|H(t, x)\|$, para cada $(t, x) \in A$, e aplicar, em seguida, III.9.12.

Ex III.61 (**A variedade esburacada**) Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 1$. Seja B uma variedade sem cantos, suavemente orientada, de dimensão n e sejam C_1, \dots, C_p variedades compactas, sem cantos, de dimensão n , contidas em $\partial_0(B)$ e disjuntas duas a duas ($p \geq 0$). Sendo $\hat{B} = B \setminus \bigcup_k \partial_0(C_k)$, seja $\hat{f}: \hat{B} \rightarrow E \setminus \{0\}$ uma aplicação contínua. Mostrar que se tem então

$$\angle(\partial_1(B), f|_{\partial_1(B)}) = \sum_k \angle(\partial_1(C_k), f|_{\partial_1(C_k)}).$$

É claro que o caso particular em que $p = 0$ afirma que, se $f: B \rightarrow E \setminus \{0\}$ é uma aplicação contínua, então

$$\angle(\partial_1(B), f|_{\partial_1(B)}) = 0.$$

Ex III.62 Sejam \hat{E} e E espaços vectoriais orientados de dimensão $n \geq 1$, o segundo dos quais munido de um produto interno. Seja \hat{U} um aberto limitado de \hat{E} e notemos $\text{fr}(\hat{U})$ a respectiva fronteira. Seja $f: \text{fr}(\hat{U}) \rightarrow E \setminus \{0\}$ uma aplicação de classe C^0 (ou, equivalentemente, para quem conheça o teorema de extensão de Tietze-Urysohn, uma aplicação contínua).

a) Mostrar que existe uma aplicação contínua $\hat{f}: \text{ad}(\hat{U}) \rightarrow E$, prolongando f . Dado um tal prolongamento \hat{f} , seja \hat{K} o subconjunto compacto de \hat{U} , constituído pelos pontos x tais que $\hat{f}(x) = 0$ e considerar, tendo em conta a aplicação do teorema de Sard estudada no exercício I.19, uma variedade compacta, sem cantos, com dimensão n , $\hat{M} \subset \hat{U}$, tal que $\hat{K} \subset \partial_0(\hat{M})$. Mostrar que o valor do ângulo sólido orientado $\angle(\partial_1(\hat{M}), \hat{f}|_{\partial_1(\hat{M})})$ não depende da escolha da variedade \hat{M} , nas condições anteriores. **Sugestão:** Dadas duas variedades \hat{M} e \hat{M}' nas condições referidas, considerar uma terceira variedade \hat{M}'' , compacta, sem cantos, com dimensão n , tal que

$$\widehat{K} \subset \partial_0(\widehat{M}'') \subset \partial_0(\widehat{M}) \cap \partial_0(\widehat{M}'),$$

aplicando em seguida o exercício anterior.

b) Tendo em conta o que se viu em a), a cada aplicação contínua $\widehat{f}: \text{ad}(\widehat{U}) \rightarrow E$, prolongando f , ficou associado um número, a saber, o ângulo sólido orientado da restrição de \widehat{f} a $\partial_1(\widehat{M})$, para uma variedade compacta, sem cantos, com dimensão n , arbitrária, contida em \widehat{U} e contendo $\widehat{K} = \{x \in \widehat{U} \mid \widehat{f}(x) = 0\}$. Mostrar que este número também não depende do prolongamento \widehat{f} escolhido (ele depende portanto apenas da aplicação $f: \text{fr}(\widehat{U}) \rightarrow E \setminus \{0\}$, e do aberto \widehat{U} que se está a considerar).

Sugestão: Dados dois prolongamentos contínuos $\widehat{f}, \tilde{f}: \text{ad}(\widehat{U}) \rightarrow E$, com os correspondentes compactos \widehat{K} e \tilde{K} , considerar $\varepsilon > 0$, tal que $\|f(x)\| > \varepsilon$, para todo o $x \in \text{fr}(\widehat{U})$, e tomar o compacto K , contendo \widehat{K} e \tilde{K} e contido em \widehat{U} , constituído pelos pontos $x \in \text{ad}(\widehat{U})$ tais que $\|\widehat{f}(x)\| \leq \varepsilon$ e $\|\tilde{f}(x)\| \leq \varepsilon$. Tomando a variedade $\widehat{M} \subset \widehat{U}$, de modo que se tenha $K \subset \partial_0(\widehat{M})$, mostrar que as restrições de \widehat{f} e \tilde{f} a $\partial_1(\widehat{M})$ são continuamente homotópicas, como aplicações de $\partial_1(\widehat{M})$ em $E \setminus \{0\}$, aplicando em seguida o exercício III.59.

c) O número que nas alíneas anteriores foi associado a cada aplicação contínua $f: \text{fr}(\widehat{U}) \rightarrow E \setminus \{0\}$ costuma ser ainda notado $\angle(f)$ (ou $\angle(\widehat{U}, f)$, se quisermos ser mais precisos). Mostrar que esta notação é compatível com a utilizada anteriormente, no caso particular em que é dada uma variedade compacta, sem cantos, de dimensão n , $\widehat{B} \subset \widehat{E}$, e se toma $\widehat{U} = \partial_0(\widehat{B})$ (portanto $\text{fr}(\widehat{U}) = \partial_1(\widehat{B})$).

CAPÍTULO IV

Introdução à Cohomologia de de Rham

§1. Cohomologia de de Rham.

IV.1.1. Sejam $M \subset E$ uma variedade e \mathbb{K} um dos corpos, \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Para cada $p \geq 0$, vamos notar $\Omega_{\mathbb{K}}^p(M)$, ou $\Omega^p(M; \mathbb{K})$, o conjunto das formas diferenciais suaves de grau p sobre M , conjunto que é trivialmente um espaço vectorial sobre \mathbb{K} . Será cómodo notarmos, para cada $p < 0$, $\Omega_{\mathbb{K}}^p(M)$, ou $\Omega^p(M; \mathbb{K})$, um espaço vectorial $\{0\}$, reduzido ao vector nulo. Com frequência, omitiremos a referência ao corpo \mathbb{K} na notação quando estiver implícito qual o corpo \mathbb{K} que se está a considerar ou quando se tratar de resultados gerais válidos para cada um dos corpos (estará então implícito que o corpo \mathbb{K} é o mesmo ao longo do enunciado). Para cada $p \geq 0$, a diferenciação exterior, definida em III.2.2, é uma aplicação linear

$$d: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M),$$

aplicação que será notada, mais precisamente, d^p quando for importante explicitar qual o valor de p que se está a considerar. Será cómodo estender esta definição, notando $d^p: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ a aplicação linear nula, no caso em que $p < 0$ (trata-se, aliás, da única aplicação linear possível). Além disso, tendo em conta III.2.8, para cada $p \in \mathbb{Z}$, é nula a aplicação composta

$$\Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+2}(M),$$

isto é, tem-se $d^{p+1} \circ d^p = 0$.

IV.1.2. Em geral, chama-se *complexo de cocadeias* a um par C^\bullet , formado por uma família de espaços vectoriais³⁸ $(C^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ e uma família de aplicações lineares $d^p: C^p \rightarrow C^{p+1}$ (os *operadores de cobordo*), tal que, para cada $p \in \mathbb{Z}$, $d^{p+1} \circ d^p = 0: C^p \rightarrow C^{p+2}$.

No quadro geral dum complexo de cocadeias C^\bullet , chamam-se *cociclos* de grau p aos elementos $x \in C^p$ tais que $d^p(x) = 0$ e *cobordos* de grau p aos elementos $x \in C^p$ tais que exista $y \in C^{p-1}$ tal que $x = d^{p-1}(y)$. Nota-se $Z^p(C^\bullet) \subset C^p$ e $B^p(C^\bullet) \subset C^p$ os subespaços vectoriais cujos elementos são, respectivamente, os cociclos e os cobordos de grau p (o núcleo e a imagem de duas aplicações lineares) e a igualdade $d^p \circ d^{p-1} = 0$ implica trivialmente

³⁸Ou, mais geralmente, de módulos sobre um anel, mas o caso dos espaços vectoriais é o que nos interessa de momento.

que se tem $B^p(C^\bullet) \subset Z^p(C^\bullet)$, o que nos permite considerar o espaço vectorial quociente

$$H^p(C^\bullet) = \frac{Z^p(C^\bullet)}{B^p(C^\bullet)},$$

a que se dá o nome de *espaço de cohomologia* de grau p do complexo de cocadeias C^\bullet . Se $x \in Z^p(C^\bullet)$, notaremos usualmente $[x]$ a classe de equivalência de x em $H^p(C^\bullet)$.

IV.1.3. Tendo em conta o que dissémos atrás, se $M \subset E$ é uma variedade, fica-lhe associado um complexo de cocadeias $\Omega_{\mathbb{K}}^\bullet(M)$, constituído pela família dos espaços vectoriais $\Omega_{\mathbb{K}}^p(M)$ e pela dos operadores de diferenciação exterior $d^p: \Omega_{\mathbb{K}}^p(M) \rightarrow \Omega_{\mathbb{K}}^{p+1}(M)$, complexo de cocadeias ao qual se dá o nome de *complexo de de Rham*³⁹ da variedade M . Aos cociclos e aos cobordos deste complexo de cocadeias dá-se, respectivamente, o nome de *formas diferenciais fechadas* e de *formas diferenciais exactas*, por outras palavras, e como já referimos ocasionalmente, uma forma diferencial suave ω , de grau p , diz-se *fechada* se verificar a condição $d\omega = 0$ e diz-se *exacta* se for da forma $d\sigma$, para alguma forma diferencial suave σ , de grau $p - 1$ (ou se for 0, no caso em que $p = 0$). Notamos simplesmente $Z_{\mathbb{K}}^p(M)$ e $B_{\mathbb{K}}^p(M)$ os espaços vectoriais $Z^p(\Omega_{\mathbb{K}}^\bullet(M))$ e $B^p(\Omega_{\mathbb{K}}^\bullet(M))$ e

$$H_{\mathbb{K}}^p(M) = \frac{Z_{\mathbb{K}}^p(M)}{B_{\mathbb{K}}^p(M)}$$

os espaços de cohomologia $H^p(\Omega_{\mathbb{K}}^\bullet(M))$, a que se dá o nome de *espaços de cohomologia de de Rham* da variedade M . Como anteriormente, omitimos com frequência das notações a referência ao corpo \mathbb{K} , quando daí não advier perigo de confusão.

A importância dos espaços de cohomologia de de Rham vem de que, como veremos adiante, eles têm frequentemente dimensão finita e a respectiva dimensão é um invariante topológico da variedade M . Isto apesar de, na maior parte dos casos os espaços vectoriais $\Omega^p(M)$, $Z^p(M)$ e $B^p(M)$, enquanto espaços de funções, serem espaços vectoriais de dimensão infinita. Reparemos também que o lema de Poincaré, demonstrado em III.7.10, diz-nos que, quando a variedade M é suavemente contráctil, toda a forma diferencial suave de grau $p \geq 1$ que seja fechada é exacta, isto é, que, para cada $p \geq 1$, $B^p(M) = Z^p(M)$ ou, equivalentemente, $H^p(M) = \{0\}$. A dimensão de um espaço de cohomologia de de Rham $H^p(M)$, com $p \geq 1$, pode portanto ser olhada intuitivamente como uma medida da “complicação” da variedade M . Neste momento, podemos apenas caracterizar um dos espaços de cohomologia não trivial, nomeadamente, o de grau 0.

³⁹A repetição da palavra “de” não é um engano. A referência é a um matemático de nome “de Rham”.

IV.1.4. Seja $M \subset E$ uma variedade. Tem-se então:

- a) Para cada $p < 0$, $H^p(M) = \{0\}$;
- b) Se M tem dimensão m , para cada $p > m$, $H^p(M) = \{0\}$;
- c) $B^0(M) = \{0\}$ e $Z^0(M)$ é o espaço vectorial das aplicações $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ que são constantes sobre cada componente conexa de M ;
- d) Seja $(M_i)_{i \in I}$ a família das componentes conexas de M e consideremos, para cada i a aplicação suave $f_i: M \rightarrow \mathbb{K}$, de valor constante 1 nos pontos de M_i e que se anula nas restantes componentes conexas. Tem-se então que as classes de equivalência $[f_i] \in H^0(M)$ são linearmente independentes e, no caso em que I é finito, constituem uma base de $H^0(M)$. Em particular, se a variedade M tem um número finito k de componentes conexas, então o espaço de cohomologia $H^0(M)$ tem dimensão k e, caso contrário, $H^0(M)$ tem dimensão infinita.

Dem: As conclusões de a) e b) resultam imediatamente de que, nas condições referidas, tem-se $\Omega^p(M) = \{0\}$, donde também $Z^p(M) = \{0\}$ e portanto $H^p(M) = \{0\}$ (lembrar que, se M tem dimensão m , então $T_x(M)$ é um espaço vectorial de dimensão m , e portanto $A^p(T_x(M); \mathbb{K}) = \{0\}$, para cada $p > m$). O facto de se ter $B^0(M) = \{0\}$ vem de que se trata da imagem da aplicação linear $d^{-1}: \Omega^{-1}(M) \rightarrow \Omega^0(M)$, cujo domínio é $\{0\}$. Uma vez que $\Omega^0(M)$ é o espaço das aplicações suaves $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ e que a diferencial exterior de uma tal aplicação suave coincide com a derivação usual, vemos que $Z^0(M)$ é o espaço das aplicações suaves $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ com derivada identicamente nula e, tendo em conta o facto de as componentes conexas de uma variedade serem subconjuntos abertos desta, em particular variedades e de toda a aplicação definida numa variedade conexa e com derivada identicamente nula ser constante, vemos que $Z^0(M)$ pode ser caracterizado alternativamente como o espaço das aplicações $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ que são constantes em cada componente conexa. Considerando as aplicações f_i definidas no enunciado, vemos que elas são elementos independentes de $Z^0(M)$, uma vez que, se $\sum a_i f_i = 0$, obtemos $a_i = 0$ ao aplicarmos ambos os membros a um ponto $x \in M_i$. Além disso, no caso em que I é finito, se $f \in Z^0(M)$ toma o valor constante a_i em M_i , é imediato que, para todo o $x \in M$, $f(x) = \sum a_i f_i(x)$,⁴⁰ o que mostra que temos uma base de $Z^0(M)$. O facto de se ter $B^0(M) = \{0\}$ implica que a aplicação canónica

$$Z^0(M) \rightarrow H^0(M) = \frac{Z^0(M)}{B^0(M)}$$

é um isomorfismo, donde a conclusão de d). \square

IV.1.5. Suponhamos que temos dois complexos de cocadeias C^\bullet e C'^\bullet , constituídos respectivamente pelos espaços vectoriais C^p , com os operadores de

⁴⁰No caso em que I é infinito, o problema está em que esta soma não tem que ter apenas um número finito de parcelas não nulas.

cobordo $d^p: C^p \rightarrow C^{p+1}$, e pelos espaços vectoriais C'^p , com os operadores de cobordo $d'^p: C'^p \rightarrow C'^{p+1}$. Dá-se o nome de *morfismo de complexos de cocadeias* de C^\bullet para C'^\bullet a uma família $\lambda^\bullet = (\lambda^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de aplicações lineares $\lambda^p: C^p \rightarrow C'^p$ tal que, para cada p , $d'^p \circ \lambda^p = \lambda^{p+1} \circ d^p$, o que se costuma também traduzir com a afirmação de que tem lugar um *diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} C^p & \xrightarrow{d} & C^{p+1} \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \lambda \\ C'^p & \xrightarrow{d'} & C'^{p+1} \end{array}$$

(repare-se que omitimos os expoentes p e $p + 1$ nos símbolos das aplicações lineares no diagrama, uma vez que eles são determinados pelos respectivos domínios).

IV.1.6. Se $\lambda^\bullet = (\lambda^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ é um morfismo de complexos de cocadeias de C^\bullet para C'^\bullet , então, para cada p , a aplicação linear $\lambda^p: C^p \rightarrow C'^p$ aplica $Z^p(C^\bullet)$ em $Z^p(C'^\bullet)$ e $B^p(C^\bullet)$ em $B^p(C'^\bullet)$ e define portanto, por passagem ao quociente, uma aplicação linear

$$H^p(\lambda^\bullet): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C'^\bullet)$$

por

$$H^p(\lambda^\bullet)([x]) = [\lambda^p(x)].$$

Têm, além disso, lugar as seguintes propriedades de functorialidade⁴¹:

a) A família Id_{C^\bullet} das aplicações lineares identidade $Id_{C^p}: C^p \rightarrow C^p$ é um morfismo de complexos de cocadeias de C^\bullet para C^\bullet e, para cada p ,

$$H^p(Id_{C^\bullet}): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C^\bullet)$$

é a aplicação linear identidade;

b) Se λ^\bullet é um morfismo de complexos de cocadeias de C^\bullet para C'^\bullet e se μ^\bullet é um morfismo de complexos de cocadeias de C'^\bullet para C''^\bullet , então a família $\mu^\bullet \circ \lambda^\bullet = (\mu^p \circ \lambda^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ é um morfismo de complexos de cocadeias de C^\bullet para C''^\bullet e, para cada p ,

$$H^p(\mu^\bullet \circ \lambda^\bullet) = H^p(\mu^\bullet) \circ H^p(\lambda^\bullet): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C''^\bullet).$$

c) Se $\lambda^\bullet = (\lambda^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ é um morfismo de complexos de cocadeias de C^\bullet para C'^\bullet , tal que, para cada p , $\lambda^p: C^p \rightarrow C'^p$ seja um isomorfismo (dizemos então que λ^\bullet é um *isomorfismo de complexos de cocadeias* de C^\bullet para C'^\bullet), então a família $\lambda^{\bullet-1} = ((\lambda^p)^{-1})_{p \in \mathbb{Z}}$ é um morfismo de complexos de cocadeias de C'^\bullet para C^\bullet e, para cada p ,

⁴¹Quem conheça as noções de categoria e de functor compreenderá a razão desta designação. Preferimos, no entanto, não alongar este texto, entrando na discussão desses conceitos.

$$H^p(\lambda^{\bullet-1}) = H^p(\lambda^\bullet)^{-1}: H^p(C'^\bullet) \rightarrow H^p(C^\bullet).$$

Dem: Se $x \in Z^p(C^\bullet)$, tem-se $d^p(x) = 0$, donde

$$d'^p(\lambda^p(x)) = \lambda^{p+1}(d^p(x)) = \lambda^{p+1}(0) = 0,$$

o que mostra que $\lambda^p(x) \in Z^p(C'^\bullet)$. Do mesmo modo, se $x \in B^p(C^\bullet)$, tem-se $x = d^{p-1}(y)$, para um certo $y \in C^{p-1}$, e então

$$\lambda^p(x) = \lambda^p(d^{p-1}(y)) = d'^p(\lambda^{p-1}(y)),$$

o que mostra que $\lambda^p(x) \in B^p(C'^\bullet)$. O facto de λ^p aplicar $Z^p(C^\bullet)$ em $Z^p(C'^\bullet)$ e $B^p(C^\bullet)$ em $B^p(C'^\bullet)$ implica que fica bem definida pela fórmula do enunciado a aplicação $H^p(\lambda^\bullet): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C'^\bullet)$. A propriedade referida em a) resulta trivialmente das definições, tal como resulta a igualdade $H^p(\mu^\bullet \circ \lambda^\bullet) = H^p(\mu^\bullet) \circ H^p(\lambda^\bullet)$, se repararmos que o facto de $\mu^\bullet \circ \lambda^\bullet$ ser um morfismo de complexos de cocadeias resulta de que

$$d''^p \circ \mu^p \circ \lambda^p = \mu^{p+1} \circ d'^p \circ \lambda^p = \mu^{p+1} \circ \lambda^{p+1} \circ d^p.$$

Quanto à conclusão de c), começamos por reparar que, de se ter $d'^p \circ \lambda^p = \lambda^{p+1} \circ d^p$, deduzimos, compondo ambos os membros à esquerda com $(\lambda^{p+1})^{-1}$ e à direita com $(\lambda^p)^{-1}$, $(\lambda^{p+1})^{-1} \circ d'^p = d^p \circ (\lambda^p)^{-1}$, o que mostra que $\lambda^{\bullet-1}$ é efectivamente um morfismo de complexos de cocadeias, e deduzimos então, de se ter $\lambda^{\bullet-1} \circ \lambda^\bullet = Id_{C^\bullet}$ e $\lambda^\bullet \circ \lambda^{\bullet-1} = Id_{C'^\bullet}$, tendo em conta as conclusões de b) e c), que se tem

$$H^p(\lambda^{\bullet-1}) \circ H^p(\lambda^\bullet) = Id_{H^p(C^\bullet)}, \quad H^p(\lambda^\bullet) \circ H^p(\lambda^{\bullet-1}) = Id_{H^p(C'^\bullet)},$$

o que mostra que $H^p(\lambda^\bullet)$ é um isomorfismo, tendo $H^p(\lambda^{\bullet-1})$ como isomorfismo inverso. \square

IV.1.7. Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ duas variedades e $f: M' \rightarrow M$ uma aplicação suave. Tendo em conta III.2.7, a família f^* das aplicações lineares

$$f^*: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M')$$

(se quiséssemos ser mais precisos deveríamos tê-las notado f^{*p}) constitui um morfismo de complexos de cocadeias de $\Omega^\bullet(M)$ para $\Omega^\bullet(M')$ pelo que, tendo em conta o que dissémos atrás, ficam-lhe associadas aplicações lineares

$$H^p(f^*): H^p(M) \rightarrow H^p(M'),$$

que notaremos simplesmente $H^p(f)$, por

$$H^p(f)([\omega]) = [f^*\omega].$$

IV.1.8. Tendo em conta a alínea a) de III.1.14, deduzimos que:

a) Sendo $M \subset E$ uma variedade, e $Id_M: M \rightarrow M$ a aplicação identidade, o

morfismo de complexos de cocadeias $Id_M^*: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ é o morfismo identidade, e portanto também cada $H^p(Id_M): H^p(M) \rightarrow H^p(M)$ é a aplicação linear identidade.

b) Se $M \subset E$, $M' \subset E'$ e $M'' \subset E''$ são variedades e $f: M'' \rightarrow M'$ e $g: M' \rightarrow M$ são aplicações suaves, o morfismo de complexos de cocadeias $(g \circ f)^*: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M'')$ coincide com o composto $f^* \circ g^*$ dos morfismos de complexos de cocadeias $g^*: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M')$ e $f^*: \Omega^\bullet(M') \rightarrow \Omega^\bullet(M'')$, e portanto, para cada p ,

$$H^p(g \circ f) = H^p(f) \circ H^p(g): H^p(M) \rightarrow H^p(M'').$$

c) Em consequência, se $g: M' \rightarrow M$ é um difeomorfismo, então $g^*: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M')$ é um isomorfismo de complexos de cocadeias e portanto, para cada p , $H^p(g): H^p(M) \rightarrow H^p(M')$ é um isomorfismo, tendo $H^p(g^{-1})$ como isomorfismo inverso.⁴²

IV.1.9. Lembremos que, como se definiu em III.7.5, dadas duas variedades $M \subset E$ e $M' \subset E'$, diz-se que duas aplicações suaves $f, g: M' \rightarrow M$ são suavemente homotópicas se existir uma aplicação suave $H: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ tal que $H(0, x) = f(x)$ e $H(1, x) = g(x)$, dizendo-se então que H é uma homotopia suave de f para g .⁴³

IV.1.10. A relação de homotopia suave é uma relação de equivalência na classe das aplicações suaves de M' para M .

Dem: A reflexividade e a simetria desta relação são essencialmente triviais: se $f: M' \rightarrow M$ é uma aplicação suave, então a aplicação suave definida por $H(t, x) = f(x)$ é uma homotopia de f para f e se $H: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ é uma homotopia suave de f para g , obtemos, a partir dela, uma homotopia suave $\hat{H}: [0, 1] \times M' \rightarrow M$, de g para f , definida por $\hat{H}(t, x) = H(1-t, x)$. Para a transitividade é que temos que ser um pouco mais cuidadosos para evitar os cantos que poderiam destruir a suavidade. Suponhamos então que $f, g, h: M' \rightarrow M$ são aplicações suaves, que a aplicação $H: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ é uma homotopia suave de f para g e que a aplicação $\hat{H}: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ é uma homotopia suave de g para h . Com o objectivo de combinarmos as homotopias H e \hat{H} para obtermos uma homotopia suave de f para h , começamos por reparar que, aplicando o teorema da partição da unidade à cobertura aberta de $[0, 1]$ constituída pelos

⁴²Para quem conheça a linguagem da teoria das categorias, as álneas a) e b) mostram que, no quadro da cohomologia de de Rham de grau p , estamos em presença de um *functor contravariante* da categoria das variedades para a dos espaços vectoriais e a conclusão principal de c) é um caso particular do resultado geral que nos garante que um functor aplica isomorfismos em isomorfismos.

⁴³Para cada $t \in [0, 1]$, ficamos com uma aplicação suave $H_t: M' \rightarrow M$, definida por $H_t(x) = H(t, x)$, tendo-se, em particular, $H_0 = f$ e $H_1 = g$. Intuitivamente, é instrutivo olhar para a homotopia suave, como sendo a família das aplicações suaves H_t , que constitui uma espécie de deformação suave de f em g .

intervalos $[0, 2/3[$ e $]1/3, 1]$, podemos deduzir a existência de uma aplicação suave $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi(t) = 0$, para cada $t \leq 1/3$, e $\varphi(t) = 1$, para cada $t \geq 2/3$ (a função da partição da unidade correspondente ao segundo aberto). Definimos então uma aplicação $\tilde{H}: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ por

$$\tilde{H}(t, x) = \begin{cases} H(\varphi(2t), x), & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ \hat{H}(\varphi(2t - 1), x), & \text{se } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

reparando, desde já, que, para cada $t \in [1/3, 2/3]$, $\tilde{H}(t, x) = g(x)$, visto que, ou $t \leq 1/2$ e então $\tilde{H}(t, x) = H(\varphi(2t), x) = H(1, x) = g(x)$, ou $t > 1/2$ e então $\tilde{H}(t, x) = \hat{H}(\varphi(2t - 1), x) = \hat{H}(0, x) = g(x)$. Podemos agora garantir que a aplicação \tilde{H} é suave, por ter restrições suaves a cada um dos três abertos $[0, 1/2[\times M'$, $]1/2, 1[\times M'$ e $]1/3, 2/3[\times M'$ de $[0, 1] \times M'$, cuja união é $[0, 1] \times M'$ e, reparando que se tem $\tilde{H}(0, x) = H(0, x) = f(x)$ e $\tilde{H}(1, x) = \hat{H}(1, x) = g(x)$, concluímos que f e g são realmente suavemente homotópicas. \square

IV.1.11. Sejam $M \subset E$, $M' \subset E'$ e $M'' \subset E''$ variedades, $f, \hat{f}: M'' \rightarrow M'$ aplicações suaves, suavemente homotópicas e $g, \hat{g}: M' \rightarrow M$ aplicações suaves, suavemente homotópicas. Tem-se então que as aplicações suaves $g \circ f: M'' \rightarrow M$ e $\hat{g} \circ \hat{f}: M'' \rightarrow M$ são também suavemente homotópicas.

Dem: Sejam $H: [0, 1] \times M'' \rightarrow M'$ uma homotopia suave de f para \hat{f} e $\hat{H}: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ uma homotopia suave de g para \hat{g} . Podemos então considerar a aplicação suave $\tilde{H}: [0, 1] \times M'' \rightarrow M$ definida por

$$\tilde{H}(t, x) = \hat{H}(t, H(t, x)),$$

a qual vai constituir uma homotopia suave de $g \circ f$ para $\hat{g} \circ \hat{f}$. \square

IV.1.12. Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ variedades e $f, g: M' \rightarrow M$ duas aplicações suaves, suavemente homotópicas. Tem-se então

$$H^p(f) = H^p(g): H^p(M) \rightarrow H^p(M').$$

Dem: Temos essencialmente uma reformulação das conclusões de III.7.6, visto que, dado $[\omega] \in H^p(M)$, tem-se $\omega \in Z^p(M)$, isto é, $d\omega = 0$ e então esse resultado garante-nos a existência de $\sigma \in \Omega^{p-1}(M')$ tal que $g^*\omega - f^*\omega = d\sigma$, por outras palavras que $g^*\omega - f^*\omega \in B^p(M')$, o que mostra que

$$[f^*\omega] = [g^*\omega] \in \frac{Z^p(M')}{B^p(M')} = H^p(M'). \square$$

IV.1.13. Recordemos que uma variedade $M \subset E$ é dita *suavemente contráctil* se existir $x_0 \in M$ tal que $Id_M: M \rightarrow M$ seja suavemente homotópica à aplicação constante de valor x_0 (cf. III.7.7). Para uma tal variedade podemos determinar explicitamente todos os espaços de cohomologia de de Rham,

nomeadamente, tem-se $H^p(M) = \{0\}$ para todo o $p \neq 0$, e $H^0(M)$ é um espaço vectorial de dimensão 1, admitindo uma base formada pela classe de equivalência da aplicação $M \rightarrow \mathbb{R}$ de valor constante igual a 1.

Dem: O facto de se ter $H^p(M) = \{0\}$ para cada $p < 0$, é um resultado trivial válido em qualquer variedade. O facto de se ter $H^p(M) = \{0\}$, para cada $p > 0$, não é mais do que uma reformulação do lema de Poincaré (cf. III.7.10), que afirma que, neste caso, $B^p(M) = Z^p(M)$. Por fim, a conclusão sobre $H^0(M)$ vai ser uma consequência da alínea d) de IV.1.4, desde que mostremos que a variedade M é conexa, visto que ela é trivialmente não vazia. Ora, sendo $H: [0, 1] \times M \rightarrow M$ uma homotopia suave entre Id_M e a aplicação de valor constante x_0 , vemos que, para cada $x \in M$, x e x_0 pertencem à mesma componente conexa de M por pertencerem ambos ao conjunto conexo formado pelos pontos da forma $H(t, x)$, com $t \in [0, 1]$. \square

Por vezes é cómodo sabermos que, numa variedade suavemente contráctil, não só a aplicação identidade é suavemente homotópica a uma certa aplicação constante, como podemos mesmo garantir que ela é suavemente homotópica a qualquer aplicação constante. De facto, podemos afirmar mesmo mais:

IV.1.14. Sejam $M \subset E$ uma variedade suavemente contráctil e $M' \subset E$ uma variedade arbitrária. Se $f, g: M' \rightarrow M$ são aplicações suaves arbitrárias, então f e g são suavemente homotópicas. Em particular, $Id_M: M \rightarrow M$ é suavemente homotópica a qualquer aplicação constante $M \rightarrow M$.

Dem: Seja $x_0 \in M$ tal que a aplicação $h_0: M \rightarrow M$, de valor constante x_0 , seja suavemente homotópica a $Id_M: M \rightarrow M$. Sejam M' uma variedade e $f_0: M' \rightarrow M$ a aplicação de valor constante x_0 . Tendo em conta IV.1.11, para cada aplicação suave $f: M' \rightarrow M$, $f = Id_M \circ f$ é suavemente homotópica a $f_0 = h_0 \circ f$. Por transitividade (cf. IV.1.10), concluímos finalmente que, se $f, g: M' \rightarrow M$ são aplicações suaves, f e g são suavemente homotópicas por serem ambas suavemente homotópicas a f_0 . \square

§2. Produtos e somas de complexos de cocadeias.

IV.2.1. Sejam $(E_j)_{j \in J}$ uma família de espaços vectoriais, E um espaço vectorial e, para cada $j \in J$, $\hat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$ uma aplicação linear. Vamos dizer que E é um produto da família dos E_j , definido pelas projecções $\hat{\pi}_j$, se, qualquer que

seja a família $(x_j)_{j \in J}$ de elementos $x_j \in E_j$, existe um, e um só $x \in E$ tal que, para cada j , $\hat{\pi}_j(x) = x_j$.⁴⁴

IV.2.2. Dada uma família $(E_j)_{j \in J}$ de espaços vectoriais, o produto cartesiano $\prod_{k \in J} E_k$, com a estrutura usual de espaço vectorial, é, eviemente, um produto daquela família, no sentido da definição anterior, definido pelas projecções canónicas usuais $\pi_j: \prod_{k \in J} E_k \rightarrow E_j$. Para além disso, dados um espaço vectorial E e aplicações lineares $\hat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$, ficamos com uma aplicação linear $\mu: E \rightarrow \prod_{k \in J} E_k$, definida por $\mu(x) = (\hat{\pi}_k(x))_{k \in J}$ (a única que verifica $\pi_j \circ \mu = \hat{\pi}_j$), sendo imediato constatar, a partir da definição, que E é um produto dos E_j , definido pelas projecções $\hat{\pi}_j$, se, e só se, a aplicação linear μ é um isomorfismo de E sobre $\prod_{k \in J} E_k$. Em particular, e de forma menos precisa, podemos dizer que os produtos de uma família de espaços vectoriais são precisamente os espaços vectoriais que são isomorfos ao produto cartesiano usual dessa família.

O interesse da definição geral de produto, que apresentámos atrás, está na possibilidade de descrever, de forma precisa, situações frequentes na prática em que aparecem espaços vectoriais que, não sendo o produto cartesiano de uma certa família são naturalmente isomorfos a esse produto (por vezes costuma dizer-se uma frase do tipo “pode ser identificado ao produto...”. Por exemplo, dados três espaços vectoriais E_1, E_2, E_3 , o produto $(E_1 \times E_2) \times E_3$ não é o mesmo que o produto $E_1 \times E_2 \times E_3$, mas é comum dizer-se que se identifica com este; o que se passa é que $(E_1 \times E_2) \times E_3$ é um produto dos espaços vectoriais E_1, E_2, E_3 , com as projecções $\hat{\pi}_j: (E_1 \times E_2) \times E_3 \rightarrow E_j$ definidas por

$$\hat{\pi}_1((x_1, x_2), x_3) = x_1, \quad \hat{\pi}_2((x_1, x_2), x_3) = x_2, \quad \hat{\pi}_3((x_1, x_2), x_3) = x_3.$$

Encontraremos adiante outros exemplos de situações deste tipo.

IV.2.3. Seja J um conjunto de índices e seja, para cada $j \in J$, C_j^\bullet um complexo de cocadeias, definido pelos espaços vectoriais C_j^p , com $p \in \mathbb{Z}$, e pelas aplicações lineares cobordo $d_j^p: C_j^p \rightarrow C_j^{p+1}$. Suponhamos que, para cada $p \in \mathbb{Z}$, se considera um produto C^p da família dos C_j^p , definido pelas projecções $\hat{\pi}_j^p: C^p \rightarrow C_j^p$. Existe então uma, e uma só, maneira de definir aplicações lineares $d^p: C^p \rightarrow C^{p+1}$, de modo a obter um complexo de cocadeias C^\bullet , constituído pelos espaços vectoriais C^p e pelas aplicações lineares de cobordo d^p , para o qual, para cada $j \in J$, a família de aplicações

⁴⁴Quem conhecer os fundamentos da Teoria das Categorias reconhecerá facilmente que esta definição é equivalente à que se enquadra na noção geral de produto numa categoria.

lineares $\hat{\pi}_j^\bullet = (\hat{\pi}_j^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ constitua um morfismo de complexos de cocadeias de C^\bullet para C_j^\bullet . Mais precisamente, para cada $x \in C^p$, $d^p(x)$ é o único elemento de C^{p+1} tal que, para cada j ,

$$\hat{\pi}_j^{p+1}(d^p(x)) = d_j^p(\hat{\pi}_j^p(x)) \in C_j^{p+1}.$$

Dem: Para cada $x \in C^p$, a existência e unicidade de um elemento $d^p(x) \in C^{p+1}$ verificando a condição acima é uma consequência do facto de C^{p+1} ser um produto dos C_j^{p+1} , definido pelas projecções $\hat{\pi}_j^{p+1}$ e é trivial a verificação de que a aplicação $d^p: C^p \rightarrow C^{p+1}$, assim definida, é efectivamente linear. O facto de, para cada $j \in J$, ser

$$\hat{\pi}_j^{p+2}(d^{p+1}(d^p(x))) = d_j^{p+1}(\hat{\pi}_j^{p+1}(d^p(x))) = d_j^{p+1}(d_j^p(\hat{\pi}_j^p(x))) = 0,$$

implica, pela parte de unicidade na definição de produto, que $d^{p+1}(d^p(x)) = 0$, o que mostra que se obteve efectivamente um complexo de cocadeias C^\bullet . A condição de definição de $d^p(x)$ no enunciado exprime exactamente o facto de cada família $\hat{\pi}_j^\bullet = (\hat{\pi}_j^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ ser um morfismo de complexos de cocadeias de C^\bullet para C_j^\bullet e isso mostra, ao mesmo tempo, que a definição apresentada para as aplicações lineares d^p é efectivamente a única que faz com que aquelas famílias constituam complexos de cocadeias. \square

IV.2.4. Nas condições anteriores, dizemos que C^\bullet é um *complexo de cocadeias produto* dos complexos de cocadeias C_j^\bullet , definido pelas projecções $\hat{\pi}_j^\bullet = (\hat{\pi}_j^p)_{p \in \mathbb{Z}}$, de C^\bullet para C_j^\bullet .

Repare-se que, no caso em que, para cada p , tomamos para C^p o produto cartesiano dos C_j^p , com as projecções canónicas usuais, as aplicações cobordo $d^p: C^p \rightarrow C^{p+1}$ não são mais do que as aplicações produto cartesiano dos d_j^p .

IV.2.5. (**Compatibilidade dos produtos com a cohomologia**) Nas condições anteriores, para cada $p \in \mathbb{Z}$, $H^p(C^\bullet)$ é um produto da família dos $H^p(C_j^\bullet)$, definido pelas projecções

$$H^p(\hat{\pi}_j^\bullet): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C_j^\bullet).^{45}$$

Mais precisamente, dados $[x_j] \in H^p(C_j^\bullet)$, onde $x_j \in Z^p(C_j^\bullet)$, sendo $x \in C^p$ o único elemento que verifica as condições $\hat{\pi}_j^p(x) = x_j$, tem-se $x \in Z^p(C^\bullet)$ e $[x]$ é o único elemento de $H^p(C^\bullet)$ cuja imagem por cada $H^p(\hat{\pi}_j^\bullet)$ é $[x_j]$.

Dem: Consideremos uma família arbitrária de elementos $[x_j] \in H^p(C_j^\bullet)$,

⁴⁵Repare-se que, mesmo no caso em que cada C^p é o produto cartesiano dos C_j^p , definido pelas projecções canónicas, $H^p(C^\bullet)$ não será, em geral, o produto cartesiano dos $H^p(C_j^\bullet)$, embora este resultado garanta que é isomorfo a este produto cartesiano. É a existência de fenómenos deste tipo que nos levou a discutir a noção geral de produto que apresentámos atrás.

onde $x_j \in Z^p(C_j^\bullet)$, isto é, $x_j \in C_j^p$ e $d_j^p(x_j) = 0$. Seja $x \in C^p$ o único elemento que verifica as condições $\widehat{\pi}_j^p(x) = x_j$. Tem-se então

$$\widehat{\pi}_j^{p+1}(d^p(x)) = d_j^p(\widehat{\pi}_j^p(x)) = d_j^p(x_j) = 0,$$

pelo que, pela parte de unicidade na definição de produto, tem-se $d^p(x) = 0$, isto é, $x \in Z^p(C^\bullet)$, o que nos permite considerar o elemento $[x] \in H^p(C^\bullet)$, para o qual se tem $H^p(\widehat{\pi}_j^\bullet)([x]) = [\widehat{\pi}_j^p(x)] = [x_j]$. Resta-nos mostrar a unicidade, para o que tomamos $[y] \in H^p(C^\bullet)$ com $[x_j] = H^p(\widehat{\pi}_j^\bullet)([y]) = [\widehat{\pi}_j^p(y)]$, para cada $j \in J$. Para cada j tem-se então $\widehat{\pi}_j^p(y) - x_j \in B^p(C_j^\bullet)$, por outras palavras, existe um elemento $z_j \in C_j^{p-1}$ tal que $d_j^{p-1}(z_j) = \widehat{\pi}_j^p(y) - x_j$. Seja $z \in C^{p-1}$ tal que, para cada j , $\widehat{\pi}_j^{p-1}(z) = z_j$. Tem-se então, para cada j ,

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_j^p(d^{p-1}(z)) &= d_j^{p-1}(\widehat{\pi}_j^{p-1}(z)) = d_j^{p-1}(z_j) = \\ &= \widehat{\pi}_j^p(y) - x_j = d_j^{p-1}(z_j) = \widehat{\pi}_j^p(y - x), \end{aligned}$$

donde $y - x = d^{p-1}(z)$, o que mostra que $[x] = [y]$ em $H^p(C^\bullet)$. \square

IV.2.6. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $(U_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de M disjuntos dois a dois e de união M . Notando $\iota_j: U_j \rightarrow M$ as inclusões, definidas por $\iota_j(x) = x$, tem-se então que o complexo de cocadeias $\Omega^\bullet(M)$ é um produto dos complexos de cocadeias $\Omega^\bullet(U_j)$, tendo como projecções as famílias de aplicações lineares $\iota_j^*: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(U_j)$. Em consequência, para cada p , $H^p(M)$ é um produto dos $H^p(U_j)$, definido pelas projecções $H^p(\iota_j)$, que associam a cada $[\omega]$ as classes $[\omega|_{U_j}]$.

Dem: Uma vez que, para cada j , a família dos $\iota_j^*: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(U_j)$ constitui um morfismo de complexos de cocadeias de $\Omega^\bullet(M)$ para $\Omega^\bullet(U_j)$, ficamos reduzidos a provar que, para cada p , $\Omega^p(M)$ é um produto dos $\Omega^p(U_j)$ com as projecções $\iota_j^*: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(U_j)$, ou seja, que, dados $\omega_j \in \Omega^p(U_j)$, existe um, e um só, $\omega \in \Omega^p(M)$ tal que, para cada j , $\omega_j = \omega|_{U_j}$ e isso é trivial, se nos lembrarmos que a suavidade de uma forma diferencial é uma questão local e que, para cada $x \in U_j$, $T_x(U_j) = T_x(M)$. \square

Repare-se que, fora do caso trivial em que não exista mais do que um aberto U_j não vazio, as hipóteses do resultado anterior só podem verificar-se se a variedade M não é conexa. De facto um caso frequente de aplicação deste resultado é aquele em que os U_j são precisamente as componentes conexas de M (lembrar que uma variedade é sempre localmente conexa e que, portanto, as suas componentes conexas são conjuntos abertos), caso em que o resultado mostra que, para determinarmos os espaços de cohomologia, apenas temos que nos preocupar como o que acontece no caso das variedades conexas.

IV.2.7. Dada uma família $(E_j)_{j \in J}$ de espaços vectoriais, vamos dizer que uma família $(x_j)_{j \in J}$, com $x_j \in E_j$, é *essencialmente finita* se se tem $x_j = 0$, com um número finito de excepções possíveis, isto é, se existe uma parte finita J_0 de J tal que $x_j = 0$, para cada $j \notin J_0$. Repare-se também que, no caso em que todos os E_j são iguais a um mesmo espaço vectorial E , para cada família essencialmente finita $(x_j)_{j \in J}$ de vectores de E fica bem definida a sua soma $\sum_{j \in J} x_j$ que é, por definição, a soma dos vectores não nulos da família e

portanto também igual a $\sum_{j \in J_0} x_j$, onde J_0 é uma parte finita arbitrária de J , tal

que $x_j = 0$, para cada $j \notin J_0$.

Repare-se que, como é trivial, quando o conjunto J é finito, toda a família indexada em J é essencialmente finita e, quando todos os espaços vectoriais coincidem, a sua soma, no sentido anterior, coincide com a sua soma, no sentido usual.

IV.2.8. Sejam $(E_j)_{j \in J}$ uma família de espaços vectoriais, E um espaço vectorial e, para cada $j \in J$, $\hat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$ uma aplicação linear. Vamos dizer que E é *uma soma* da família dos E_j , *definida pelas injecções* $\hat{\iota}_j$, se, qualquer que seja $x \in E$, existe uma, e uma só, família essencialmente finita $(x_j)_{j \in J}$, com $x_j \in E_j$, tal que $x = \sum_{j \in J} \hat{\iota}_j(x_j)$. É imediato constatar-se que esta condição

pode ser enunciada, de modo equivalente, exigindo que cada $\hat{\iota}_j$ seja uma aplicação linear injectiva e que E seja soma directa dos seus subespaços vectoriais $\hat{\iota}_j(E_j)$.

IV.2.9. Como primeiro exemplo, trivial, de soma, no sentido anterior, temos as somas directas usuais de subespaços vectoriais: Se $(E_j)_{j \in J}$ é uma família de subespaços vectoriais de E e se $\iota_j: E_j \rightarrow E$ são as inclusões, então E é uma soma dos E_j , com as injecções ι_j se, e só se E é soma directa dos E_j .

Vamos agora estudar as relações que existem entre as noções de soma e de produto de espaços vectoriais e que mostrarão que, no caso em que o conjunto de índices é finito, dar uma soma é equivalente a dar um produto. Em qualquer caso, e como vamos ver, a partir de um produto é sempre possível construir uma soma.

IV.2.10. Sejam $(E_j)_{j \in J}$ uma família de espaços vectoriais e E um produto desta família, com as projecções $\hat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$. Têm então lugar um subespaço vectorial $E_0 \subset E$, constituído pelos $x \in E$ tais que a família $(\hat{\pi}_j(x))_{j \in J}$ seja essencialmente finita, e aplicações lineares $\hat{\iota}_j: E_j \rightarrow E_0 \subset E$, definidas pela condição de, para cada $y \in E_j$, se ter

$$\hat{\pi}_k(\hat{\iota}_j(y)) = \begin{cases} y, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j, \end{cases}$$

e E_0 é uma soma dos E_j com as injecções $\hat{\iota}_j$ (dizemos que os $\hat{\iota}_j$ são as *injecções associadas* às projecções $\hat{\pi}_j$). Mais precisamente, para cada $x \in E$, existe uma única família essencialmente finita $(x_j)_{j \in J}$, com $x_j \in E_j$, tal que $x = \sum \hat{\iota}_j(x_j)$, a saber, a definida por $x_j = \hat{\pi}_j(x)$.

Dem: O facto de E_0 ser efectivamente um subespaço vectorial é de verificação simples, se repararmos que a união de dois conjuntos finitos é ainda um conjunto finito. É também imediato verificar-se que as aplicações $\hat{\iota}_j: E_j \rightarrow E_0$, definidas no enunciado são efectivamente lineares. Reparemos agora que, se $x \in E_0$ e se $(x_j)_{j \in J}$ é uma família essencialmente finita tal que $x = \sum \hat{\iota}_j(x_j)$ então, aplicando $\hat{\pi}_k$ a ambos os membros, obtemos $\hat{\pi}_k(x) = x_k$, o que nos mostra a unicidade de uma possível decomposição. Por fim, dado $x \in E_0$ arbitrário, pondo $x_j = \hat{\pi}_j(x) \in E_j$, a família $(x_j)_{j \in J}$ vai ser, por definição, essencialmente finita e o facto de se ter, para cada k ,

$$\hat{\pi}_k\left(\sum_j \hat{\iota}_j(x_j)\right) = \sum_j \hat{\pi}_k(\hat{\iota}_j(x_j)) = x_k = \hat{\pi}_k(x)$$

implica, pela parte de unicidade na definição de produto, que se tem $x = \sum \hat{\iota}_j(x_j)$. \square

IV.2.11. Sejam $(E_j)_{j \in J}$ uma família de espaços vectoriais e E um espaço vectorial soma desta família, com as injecções $\hat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$. Existem então aplicações lineares $\hat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$, a que daremos o nome de *projecções associadas*, definidas pela condição de, para cada $x \in E$, se ter $\hat{\pi}_j(x) = x_j$, onde $(x_j)_{j \in J}$ é a única família essencialmente finita, com $x_j \in E_j$, tal que $x = \sum \hat{\iota}_j(x_j)$.

Estas projecções verificam então as seguintes condições:

a) Para cada $y \in E_j$, tem-se

$$\hat{\pi}_k(\hat{\iota}_j(y)) = \begin{cases} y, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j. \end{cases}$$

b) Para cada $x \in E$, a família $(\hat{\iota}_j(\hat{\pi}_j(x)))_{j \in J}$, de vectores de E , é essencialmente finita e

$$x = \sum_{j \in J} \hat{\iota}_j(\hat{\pi}_j(x)).$$

Dem: A verificação de que cada aplicação $\hat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$ é efectivamente linear é trivial e a conclusão de b) é essencialmente apenas uma reformulação da definição das aplicações $\hat{\pi}_j$. A alínea a) resulta também da definição das

projecções, se repararmos que, para cada $y \in E_j$, se pode escrever

$$\widehat{\iota}_j(y) = \widehat{\iota}_j(y) + \sum_{k \neq j} \widehat{\iota}_k(0). \square$$

IV.2.12. Suponhamos, reciprocamente, que $(E_j)_{j \in J}$ é uma família de espaços vectoriais, que E é um espaço vectorial e que, para cada $j \in J$, temos aplicações lineares $\widehat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$ e $\widehat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$, verificando as condições:

a) Para cada $y \in E_j$, tem-se

$$\widehat{\pi}_k(\widehat{\iota}_j(y)) = \begin{cases} y, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j. \end{cases}$$

b) Para cada $x \in E$, a família $(\widehat{\iota}_j(\widehat{\pi}_j(x)))_{j \in J}$, de vectores de E , é essencialmente finita e

$$x = \sum_{j \in J} \widehat{\iota}_j(\widehat{\pi}_j(x)).$$

Tem-se então que E é uma soma da família dos E_j , com as injecções $\widehat{\iota}_j$, e as aplicações lineares $\widehat{\pi}_j$ são as projecções associadas.

Dem: O facto de se ter, por a), $\widehat{\pi}_j \circ \widehat{\iota}_j = Id_{E_j}$ implica que cada aplicação linear $\widehat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$ é injectiva e deduz-se então de b) que, para cada $x \in E$, a família dos $x_j = \widehat{\pi}_j(x) \in E_j$ é essencialmente finita e é tal que $x = \sum$

$\widehat{\iota}_j(x_j)$. Quanto à unicidade, se fosse $x = \sum \widehat{\iota}_j(y_j)$, com a família dos $y_j \in E_j$ essencialmente finita, obtínhamos, aplicando $\widehat{\pi}_k$ a ambos os membros e tendo em conta a), $x_k = \widehat{\pi}_k(x) = y_k$. Ficou assim provado que E é uma soma dos E_j , com as injecções $\widehat{\iota}_j$ e resulta imediatamente de b) que os $\widehat{\pi}_j$ são as projecções associadas. \square

No caso em que o conjunto dos índices J é finito⁴⁶, todas as famílias são essencialmente finitas e podemos enunciar resultados correspondentes aos dois anteriores para os produtos, o que mostra, em particular a equivalência essencial entre as noções de soma e de produto.

IV.2.13. Seja $(E_j)_{j \in J}$ uma família finita de espaços vectoriais e seja E um produto dos E_j , com as projecções $\widehat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$. Sendo $\widehat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$ as injecções associadas (cf. IV.2.10), são então verificadas as propriedades:

a) Para cada $y \in E_j$, tem-se

⁴⁶Ou, mais geralmente, J pode ser infinito, mas $E_j = \{0\}$, salvo para um número finito de índices.

$$\widehat{\pi}_k(\widehat{\iota}_j(y)) = \begin{cases} y, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j. \end{cases}$$

b) Para cada $x \in E$,

$$x = \sum_{j \in J} \widehat{\iota}_j(\widehat{\pi}_j(x)).$$

Em particular, E também é uma soma dos E_j , com as injecções $\widehat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$, e os $\widehat{\pi}_j$ são as projecções associadas.

Dem: A conclusão de a) é simplesmente a definição das injecções associadas a um produto. Quanto a b), a igualdade resulta da parte de unicidade na definição de produto, uma vez que, para cada $k \in J$, e tendo em conta a),

$$\widehat{\pi}_k\left(\sum_{j \in J} \widehat{\iota}_j(\widehat{\pi}_j(x))\right) = \widehat{\pi}_k(x).$$

O facto de E ser uma soma dos E_j , com as injecções $\widehat{\iota}_j$, e de as projecções associadas a esta soma serem os $\widehat{\pi}_j$, é agora uma consequência de IV.2.12. \square

IV.2.14. Suponhamos, reciprocamente, que $(E_j)_{j \in J}$ é uma família finita de espaços vectoriais, que E é um espaço vectorial e que, para cada $j \in J$, $\widehat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$ e $\widehat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$ são aplicações lineares verificando as condições:

a) Para cada $y \in E_j$, tem-se

$$\widehat{\pi}_k(\widehat{\iota}_j(y)) = \begin{cases} y, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j. \end{cases}$$

b) Para cada $x \in E$,

$$x = \sum_{j \in J} \widehat{\iota}_j(\widehat{\pi}_j(x)).$$

Tem-se então que E é um produto dos E_j , com as projecções $\widehat{\pi}_j$, e os $\widehat{\iota}_j$ são as injecções associadas.

Em particular, tendo em conta IV.2.11, se E é uma soma da família finita dos E_j , com as injecções $\widehat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$, e se $\widehat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$ são as projecções associadas, então E é um produto dos E_j , com as projecções $\widehat{\pi}_j$ e as injecções associadas são os $\widehat{\iota}_j$.

Dem: Seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família arbitrária, com $x_j \in E_j$. Se $x \in E$ é tal que, para cada j , $\widehat{\pi}_j(x) = x_j$, deduzimos de b) que

$$x = \sum_{j \in J} \widehat{\iota}_j(\widehat{\pi}_j(x)) = \sum_{j \in J} \widehat{\iota}_j(x_j).$$

Por outro lado, se definirmos $x = \sum_{j \in J} \widehat{\iota}_j(x_j)$, resulta de a) que, para cada k ,

$\widehat{\pi}_k(x) = x_k$. Ficou assim provado que E é efectivamente um produto dos E_j , com as projecções $\widehat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$, e o facto de as injecções associadas serem os $\widehat{\iota}_j$ é uma mera reformulação de a). \square

IV.2.15. Seja J um conjunto de índices e seja, para cada $j \in J$, C_j^\bullet um complexo de cocadeias, definido pelos espaços vectoriais C_j^p , com $p \in \mathbb{Z}$, e pelas aplicações lineares cobordo $d_j^p: C_j^p \rightarrow C_j^{p+1}$. Suponhamos que, para cada $p \in \mathbb{Z}$, se considera uma soma C^p da família dos C_j^p , definida pelas injecções $\widehat{\iota}_j^p: C_j^p \rightarrow C^p$. Existe então uma, e uma só, maneira de definir aplicações lineares $d^p: C^p \rightarrow C^{p+1}$, de modo a obter um complexo de cocadeias C^\bullet , constituído pelos espaços vectoriais C^p e pelas aplicações lineares de cobordo d^p , para o qual, para cada $j \in J$, a família de aplicações lineares $\widehat{\iota}_j = (\widehat{\iota}_j^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ constitua um morfismo de complexos de cocadeias de C_j^\bullet para C^\bullet . Mais precisamente, para cada $x \in C^p$, com $x = \sum \widehat{\iota}_j^p(x_j)$, onde $x_j \in C_j^p$, $d^p(x)$ é o elemento de C^{p+1} ,

$$d^p(x) = \sum_j \widehat{\iota}_j^{p+1}(d_j^p(x_j)).$$

Dem: Por definição de soma, cada $x \in C^p$ pode-se escrever de maneira única na forma $x = \sum \widehat{\iota}_j^p(x_j)$, com a família dos $x_j \in C_j^p$ essencialmente finita, de onde resulta trivialmente que a família dos $d_j^p(x_j) \in C_j^{p+1}$ é também essencialmente finita, o que nos permite concluir que fica bem definida uma aplicação $d^p: C^p \rightarrow C^{p+1}$ por

$$d^p(x) = \sum_j \widehat{\iota}_j^{p+1}(d_j^p(x_j)),$$

sendo trivial verificar que esta aplicação é linear. É também imediato verificar que se tem $d^{p+1}(d^p(x)) = 0$, pelo que obtivemos assim efectivamente um complexo de cocadeias C^\bullet . Se $y \in C_j^p$, podemos escrever $\widehat{\iota}_j(y) = \sum \widehat{\iota}_k(x_k)$, com $x_j = y$ e $x_k = 0$, para cada $k \neq j$, pelo que vem

$$d^p(\widehat{\iota}_j(y)) = \sum_k \widehat{\iota}_k^{p+1}(d_k^p(x_k)) = \widehat{\iota}_j^{p+1}(d_j^p(y)),$$

o que mostra que $\widehat{\iota}_j = (\widehat{\iota}_j^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ constitui um morfismo de complexos de cocadeias de C_j^\bullet para C^\bullet . Quanto à unicidade, basta repararmos que, dados morfismos $d^p: C^p \rightarrow C^{p+1}$, definindo uma estrutura de complexo de cocadeias, relativamente à qual os $\widehat{\iota}_j = (\widehat{\iota}_j^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ constituíssem morfismos de

complexos de cocadeias, não podia deixar de ser, para cada $x = \sum \widehat{\iota}_j^p(x_j)$,

$$d^p(x) = \sum_j d^p(\widehat{\iota}_j^p(x_j)) = \sum_j \widehat{\iota}_j^{p+1}(d_j^p(x_j)). \square$$

IV.2.16. Nas condições anteriores, dizemos que C^\bullet é um *complexo de cocadeias soma* dos complexos de cocadeias C_j^\bullet , definido pelas injecções $\widehat{\iota}_j = (\widehat{\iota}_j^p)_{p \in \mathbb{Z}}$, de C_j^\bullet para C^\bullet .

IV.2.17. (**Compatibilidade das somas com a cohomologia**) Nas condições anteriores, para cada $p \in \mathbb{Z}$, $H^p(C^\bullet)$ é uma soma da família dos $H^p(C_j^\bullet)$, definida pelas injecções $H^p(\widehat{\iota}_j): H^p(C_j^\bullet) \rightarrow H^p(C^\bullet)$. Além disso, sendo, para cada $p \in \mathbb{Z}$ e $j \in J$, $\widehat{\pi}_j: C^p \rightarrow C_j^p$ as projecções associadas à apresentação de C^p como soma dos C_j^p , tem-se que as famílias $\widehat{\pi}_j = (\widehat{\pi}_j^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ vão constituir morfismos de complexos de cocadeias de C^\bullet para C_j^\bullet e as aplicações lineares $H^p(\widehat{\pi}_j): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C_j^\bullet)$ são as projecções associadas à apresentação de $H^p(C^\bullet)$ como soma dos $H^p(C_j^\bullet)$.

Dem: Para cada $x \in C^p$, podemos escrever $x = \sum \widehat{\iota}_j^p(x_j)$, com a família dos $x_j \in C_j^p$ essencialmente finita, tendo-se então $d^p(x) = \sum \widehat{\iota}_j^{p+1}(d_j^p(x_j))$, pelo que

$$\widehat{\pi}_j^{p+1}(d^p(x)) = d_j^p(x_j) = d_j^p(\widehat{\pi}_j^p(x)),$$

o que mostra que $\widehat{\pi}_j$ é efectivamente um morfismo de complexos de cocadeias de C^\bullet para C_j^\bullet . Tendo em conta IV.2.11, sabemos que, para cada p , tem-se, para $y \in C_j^p$,

$$\widehat{\pi}_k^p(\widehat{\iota}_j^p(y)) = \begin{cases} y, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

e que, para cada $x \in C^p$,

$$x = \sum_j \widehat{\iota}_j^p(\widehat{\pi}_j^p(x)),$$

com a família dos $\widehat{\iota}_j^p(\widehat{\pi}_j^p(x))$ essencialmente finita e daqui resulta imediatamente que, para cada $[y] \in H^p(C_j^\bullet)$

$$H^p(\widehat{\pi}_j)(H^p(\widehat{\iota}_j)([y])) = \begin{cases} [y], & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}$$

e que, para cada $[x] \in H^p(C^\bullet)$,

$$[x] = \sum_j H^p(\hat{\iota}_j^*)(H^p(\hat{\pi}_j^*)([x])),$$

com a família dos $H^p(\hat{\iota}_j^*)(H^p(\hat{\pi}_j^*)([x]))$ essencialmente finita. Tendo em conta IV.2.12, deduzimos daqui que $H^p(C_j^\bullet)$ é efectivamente uma soma dos $H^p(C_j^\bullet)$, com as injecções $H^p(\hat{\iota}_j^*): H^p(C_j^\bullet) \rightarrow H^p(C^\bullet)$, e que as projecções associadas são os $H^p(\hat{\pi}_j^*): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C_j^\bullet)$. \square

IV.2.18. (O dual duma soma é um produto) Seja $(E_j)_{j \in J}$ uma família de espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e seja E uma soma desta família, com as injecções $\hat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$. Seja $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e consideremos, para cada j , a aplicação linear dual $\hat{\iota}_j^*: L(E; \mathbb{K}') \rightarrow L(E_j; \mathbb{K}')$, definida por $\hat{\iota}_j^*(\alpha) = \alpha \circ \hat{\iota}_j$ (cf. II.2.13). Tem-se então que $L(E; \mathbb{K}')$ é um produto da família dos $L(E_j; \mathbb{K}')$, com as projecções $\hat{\iota}_j^*: L(E; \mathbb{K}') \rightarrow L(E_j; \mathbb{K}')$.⁴⁷

Dem: Seja, para cada $j \in J$, $\alpha_j \in L(E_j; \mathbb{K}')$. Para cada $x \in E$, existe, por definição, uma, e uma só, família essencialmente finita $(x_j)_{j \in J}$, com $x_j \in E_j$, tal que $x = \sum \hat{\iota}_j(x_j)$ e então a família dos elementos $\alpha_j(x_j)$ de \mathbb{K}' é também essencialmente finita, o que nos permite definir um elemento $\alpha(x) \in \mathbb{K}'$ por $\alpha(x) = \sum \alpha_j(x_j)$. É trivial verificar que a aplicação $\alpha: E \rightarrow \mathbb{K}'$, assim definida, é linear, ou seja, que $\alpha \in L(E; \mathbb{K}')$. Para cada j , tem-se $\alpha \circ \hat{\iota}_j = \alpha_j$, visto que, se $x' \in E_j$, tem-se $\hat{\iota}_j(x') = \sum \hat{\iota}_k(x_k)$, com $x_j = x'$ e $x_k = 0$, para cada $k \neq j$, donde $\alpha(\hat{\iota}_j(x')) = \alpha_j(x')$. Por fim, se $\beta \in L(E; \mathbb{K}')$ é tal que, para cada j , $\beta \circ \hat{\iota}_j = \alpha_j$, obtemos, para cada $x \in E$, com a decomposição acima indicada,

$$\beta(x) = \beta\left(\sum_j \hat{\iota}_j(x_j)\right) = \sum_j \beta(\hat{\iota}_j(x_j)) = \sum_j \alpha_j(x_j) = \alpha(x). \square$$

IV.2.19. (O dual dum produto finito é uma soma) Seja $(E_j)_{j \in J}$ uma família finita de espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e seja E um produto desta família, com as projecções $\hat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$. Seja $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$ e consideremos, para cada $j \in J$, a aplicação linear dual $\hat{\pi}_j^*: L(E_j; \mathbb{K}') \rightarrow L(E; \mathbb{K}')$. Tem-se então que $L(E; \mathbb{K}')$ é uma soma da família dos $L(E_j; \mathbb{K}')$, tendo como injecções as aplicações lineares $\hat{\pi}_j^*: L(E_j; \mathbb{K}') \rightarrow L(E; \mathbb{K}')$ e, sendo $\hat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$ as injecções associadas ao produto referido, as projecções associadas a esta soma são as aplicações lineares $\hat{\iota}_j^*: L(E; \mathbb{K}') \rightarrow L(E_j; \mathbb{K}')$.

Dem: Por IV.2.13, tem-se $\hat{\pi}_j \circ \hat{\iota}_j = Id: E_j \rightarrow E_j$, $\hat{\pi}_j \circ \hat{\iota}_k = 0$, se $j \neq k$, e

⁴⁷Pelo contrário, em geral, o dual dum produto não será uma soma. Isso acontece, no entanto, no caso em que J é finito (cf. o próximo resultado).

$\sum \widehat{\iota}_j \circ \widehat{\pi}_j = Id: E \rightarrow E$. Daqui se deduz que

$$\begin{aligned}\widehat{\iota}_j^* \circ \widehat{\pi}_j^* &= (\widehat{\pi}_j \circ \widehat{\iota}_j)^* = Id: L(E_j; \mathbb{K}') \rightarrow L(E_j; \mathbb{K}'), \\ \widehat{\iota}_k^* \circ \widehat{\pi}_j^* &= (\widehat{\pi}_j \circ \widehat{\iota}_k)^* = 0, \text{ se } j \neq k,\end{aligned}$$

$$\sum_j \widehat{\pi}_j^* \circ \widehat{\iota}_j^* = \left(\sum_j \widehat{\iota}_j \circ \widehat{\pi}_j \right)^* = Id: L(E; \mathbb{K}') \rightarrow L(E; \mathbb{K}'),$$

o que implica o resultado, tendo em conta IV.2.12. \square

§3. Sucessão exacta de Mayer-Vietoris.

Se uma variedade M é união disjunta de dois subconjuntos abertos U e V , então, como vimos em IV.2.6, $H^p(M)$ é um produto de $H^p(U)$ e $H^p(V)$, com as projecções $H^p(\iota_1)$ e $H^p(\iota_2)$, onde $\iota_1: U \rightarrow M$ e $\iota_2: V \rightarrow M$ são as inclusões, e portanto existe um isomorfismo $H^p(M) \rightarrow H^p(U) \times H^p(V)$, definido por $[\omega] \mapsto ([\omega|_U], [\omega|_V])$. No caso em que M é união de dois subconjuntos abertos U e V , não obrigatoriamente disjuntos, ficamos ainda com uma aplicação linear $H^p(M) \rightarrow H^p(U) \times H^p(V)$, definida pela mesma fórmula, mas essa aplicação não tem que ser injectiva nem sobrejectiva. A sucessão exacta de Mayer-Vietoris, que estudamos nesta secção, permite relacionar aquela aplicação linear com outras, que fazem intervir a cohomologia de $U \cap V$, e é um processo extremamente importante para ajudar ao cálculo efectivo de alguns espaços de cohomologia. Começamos por estudar o que podemos fazer quando temos, em geral, uma sucessão exacta de complexos de cocadeias (relembrar a discussão sobre a noção de sucessão exacta apresentada de II.7.18 a II.7.22).

IV.3.1. Consideremos três complexos de cocadeias C^\bullet , C'^\bullet e C''^\bullet e dois morfismos de complexos de cocadeias λ^\bullet , de C^\bullet para C'^\bullet , e μ^\bullet , de C'^\bullet para C''^\bullet . Diz-se que aqueles morfismos definem uma *sucessão exacta curta de complexos de cocadeias*, ou que

$$0 \rightarrow C^\bullet \xrightarrow{\lambda^\bullet} C'^\bullet \xrightarrow{\mu^\bullet} C''^\bullet \rightarrow 0$$

é uma sucessão exacta curta de complexos de cocadeias se, para cada $p \in \mathbb{Z}$,

$$\{0\} \rightarrow C^p \xrightarrow{\lambda^p} C'^p \xrightarrow{\mu^p} C''^p \rightarrow \{0\}$$

é uma sucessão exacta curta de espaços vectoriais (cf. II.7.20).

Nas condições anteriores, ficamos, para cada $p \in \mathbb{Z}$, com aplicações lineares $H^p(\lambda^\bullet): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C'^\bullet)$ e $H^p(\mu^\bullet): H^p(C'^\bullet) \rightarrow H^p(C''^\bullet)$ e poderíamos ser levados a pensar que ficássemos com sucessões exactas curtas

$$\{0\} \rightarrow H^p(C^\bullet) \xrightarrow{H^p(\lambda^\bullet)} H^p(C'^\bullet) \xrightarrow{H^p(\mu^\bullet)} H^p(C''^\bullet) \rightarrow \{0\}.$$

Tal não é o caso e, como veremos no próximo resultado, tudo o que podemos afirmar é que a sucessão anterior é exacta em $H^p(C''^\bullet)$, no sentido de ser exacta a sucessão

$$H^p(C^\bullet) \xrightarrow{H^p(\lambda^\bullet)} H^p(C'^\bullet) \xrightarrow{H^p(\mu^\bullet)} H^p(C''^\bullet),$$

e que existem certas “aplicações lineares de conexão” que ligam estas sucessões exactas para os diferentes valores de p e que permitem obter uma sucessão exacta indefinidamente prolongável nos dois sentidos.

IV.3.2. (Lema da Serpente⁴⁸) Seja

$$0 \rightarrow C^\bullet \xrightarrow{\lambda^\bullet} C'^\bullet \xrightarrow{\mu^\bullet} C''^\bullet \rightarrow 0$$

uma sucessão exacta curta de complexos de cocadeias. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ tem então lugar uma aplicação linear $\partial^p: H^p(C''^\bullet) \rightarrow H^{p+1}(C^\bullet)$ (a *aplicação linear de conexão*), definida do seguinte modo:

Seja $[x''] \in H^p(C''^\bullet)$, onde $x'' \in Z^p(C''^\bullet)$; podemos então escolher $x' \in C'^p$ tal que $\mu^p(x') = x''$ e $x \in C^{p+1}$ tal que $\lambda^{p+1}(x) = d'^p(x')$ e então $x \in Z^{p+1}(C^\bullet)$ e a sua classe de equivalência $[x] \in H^{p+1}(C^\bullet)$ não depende das escolhas feitas para x'' (na respectiva classe de equivalência), para x' e para x ; pomos então, por definição, $\partial^p([x'']) = [x]$. Tem então lugar, para cada p , uma sucessão exacta

$$H^p(C^\bullet) \xrightarrow{H^p(\lambda^\bullet)} H^p(C'^\bullet) \xrightarrow{H^p(\mu^\bullet)} H^p(C''^\bullet) \xrightarrow{\partial^p} H^{p+1}(C^\bullet) \xrightarrow{H^{p+1}(\lambda^\bullet)} H^{p+1}(C'^\bullet),$$

que pode ser indefinidamente prolongada nos dois sentidos, e a que se dá o nome de *sucessão exacta de cohomologia* associada à sucessão exacta curta de complexos de cocadeias.

Dem: Com o fim de melhor sistematizarmos a demonstração, que é um pouco longa, vamos dividir esta em várias alíneas, começando por apresentar um diagrama que pode ajudar a nos situarmos ao longo desta.

⁴⁸A explicação para o nome “Lema da Serpente” está no diagrama que apresentamos no início da demonstração e no modo como nos movimentamos ao longo dele no decurso desta.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & C^{p-1} & \xrightarrow{\lambda^{p-1}} & C'^{p-1} & \xrightarrow{\mu^{p-1}} & C''^{p-1} & \longrightarrow & \{0\} \\
& & \downarrow d^{p-1} & & \downarrow d'^{p-1} & & \downarrow d''^{p-1} & & \\
\{0\} & \longrightarrow & C^p & \xrightarrow{\lambda^p} & C'^p & \xrightarrow{\mu^p} & C''^p & \longrightarrow & \{0\} \\
& & \downarrow d^p & & \downarrow d'^p & & \downarrow d''^p & & \\
\{0\} & \longrightarrow & C^{p+1} & \xrightarrow{\lambda^{p+1}} & C'^{p+1} & \xrightarrow{\mu^{p+1}} & C''^{p+1} & \longrightarrow & \{0\} \\
& & \downarrow d^{p+1} & & \downarrow d'^{p+1} & & \downarrow d''^{p+1} & & \\
\{0\} & \longrightarrow & C^{p+2} & \xrightarrow{\lambda^{p+2}} & C'^{p+2} & \xrightarrow{\mu^{p+2}} & C''^{p+2} & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

a) Vamos começar por verificar que as aplicações lineares de conexão estão bem definidas. Seja então $[x''] \in H^p(C''^\bullet)$, onde $x'' \in Z^p(C''^\bullet)$. A possibilidade de escolher $x' \in C'^p$ tal que $\mu^p(x') = x''$ é garantida pelo facto de $\mu^p: C'^p \rightarrow C''^p$ ser uma aplicação linear sobrejectiva. Podemos então escrever

$$\mu^{p+1}(d'^p(x')) = d''^p(\mu^p(x')) = d''^p(x'') = 0,$$

pele que $d'^p(x')$ pertence ao núcleo da aplicação linear μ^{p+1} que é, por hipótese, igual à imagem da aplicação linear λ^{p+1} , o que garante a existência de $x \in C^{p+1}$ tal que $\lambda^{p+1}(x) = d'^p(x')$. Tem-se então

$$\lambda^{p+2}(d^{p+1}(x)) = d'^{p+1}(\lambda^{p+1}(x)) = d'^{p+1}(d'^p(x')) = 0$$

o que, por a aplicação linear λ^{p+2} ser injectiva, implica que $d^{p+1}(x) = 0$, isto é, que se tem $x \in Z^{p+1}(C^\bullet)$. Provemos agora que o elemento $[x] \in H^{p+1}(C^\bullet)$ não depende das escolhas feitas. Consideramos, para isso, $y'' \in Z^p(C''^\bullet)$ tal que $[y''] = [x''] \in H^p(C''^\bullet)$, e escolhemos $y' \in C'^p$ tal que $\mu^p(y') = y''$ e $y \in C^{p+1}$ tal que $\lambda^{p+1}(y) = d'^p(y')$. Tem-se então $y'' - x'' \in B^p(C''^\bullet)$, o que implica a existência de $z'' \in C''^{p-1}$ tal que $y'' - x'' = d''^{p-1}(z'')$. O facto de a aplicação linear μ^{p-1} ser sobrejectiva garante a existência de $z' \in C'^{p-1}$ tal que $\mu^{p-1}(z') = z''$. Tem-se então

$$\mu^p(y' - x' - d'^{p-1}(z')) = y'' - x'' - d''^{p-1}(\mu^{p-1}(z')) = 0$$

pele que, uma vez que o núcleo da aplicação linear μ^p coincide com a imagem da aplicação linear λ^p , podemos concluir a existência de $z \in C^p$ tal que $\lambda^p(z) = y' - x' - d'^{p-1}(z')$. Tem-se então

$$\begin{aligned}
\lambda^{p+1}(d^p(z)) &= d'^p(\lambda^p(z)) = d'^p(y' - x' - d'^{p-1}(z')) = d'^p(y') - d'^p(x') = \\
&= \lambda^{p+1}(y) - \lambda^{p+1}(x) = \lambda^{p+1}(y - x),
\end{aligned}$$

o que, por a aplicação linear λ^{p+1} ser injectiva, implica que $d^p(z) = y - x$, ou seja, que $[x] = [y]$ em $H^{p+1}(C^\bullet)$. Ficámos assim com uma aplicação bem definida $\partial^p: H^p(C''^\bullet) \rightarrow H^{p+1}(C^\bullet)$, sendo trivial a verificação de que esta aplicação é linear.

b) Vamos agora verificar a exactidão da sucessão exacta de cohomologia em $H^p(C'')$, isto é, que a imagem da aplicação $H^p(\lambda^\bullet): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C'')$ coincide com o núcleo da aplicação $H^p(\mu^\bullet): H^p(C'') \rightarrow H^p(C''')$.

O facto de se ter $\mu^p \circ \lambda^p = 0$ implica trivialmente que se tem $H^p(\mu^\bullet) \circ H^p(\lambda^\bullet) = 0$, e portanto que a imagem está contida no núcleo.

Suponhamos, reciprocamente, que $[x'] \in H^p(C'')$, com $x' \in Z^p(C'')$, pertence ao núcleo de $H^p(\mu^\bullet)$, isto é, que se tem $\mu^p(x') \in B^p(C''')$, ou seja, que existe $x'' \in C''^{p-1}$ tal que $d''^{p-1}(x'') = \mu^p(x')$. O facto de a aplicação linear μ^{p-1} ser sobrejectiva garante a existência de $y' \in C''^{p-1}$ tal que $\mu^{p-1}(y') = x''$. Podemos então escrever

$$\mu^p(x' - d''^{p-1}(y')) = d''^{p-1}(x'') - d''^{p-1}(\mu^{p-1}(y')) = 0,$$

ou seja, $x' - d''^{p-1}(y')$ pertence ao núcleo da aplicação linear μ^p , que é igual à imagem de λ^p , pelo que podemos considerar $x \in C^p$ tal que $x' - d''^{p-1}(y') = \lambda^p(x)$. Tem-se então

$$\lambda^{p+1}(d^p(x)) = d'^p(\lambda^p(x)) = d'^p(x' - d''^{p-1}(y')) = d'^p(x') = 0$$

pelo que, por a aplicação linear λ^{p+1} ser injectiva, tem-se $d^p(x) = 0$, ou seja, $x \in Z^p(C^\bullet)$. Podemos assim considerar o elemento $[x] \in H^p(C^\bullet)$ e vem

$$H^p(\lambda^\bullet)([x]) = [\lambda^p(x)] = [x' - d''^{p-1}(y')] = [x'],$$

o que mostra que $[x']$ pertence à imagem de $H^p(\lambda^\bullet)$.

c) Vamos agora verificar a exactidão da sucessão exacta de cohomologia em $H^p(C''')$, isto é, que a imagem da aplicação $H^p(\mu^\bullet): H^p(C'') \rightarrow H^p(C''')$ coincide com o núcleo da aplicação de conexão $\partial^p: H^p(C''') \rightarrow H^{p+1}(C^\bullet)$.

Um elemento da imagem de $H^p(\mu^\bullet)$ é um elemento da forma $[\mu^p(x')]$, com $x' \in Z^p(C'')$, e o facto de se ter $\lambda^{p+1}(0) = 0 = d^p(x')$ implica, por definição, que $\partial^p([\mu^p(x')]) = 0$.

Suponhamos, reciprocamente, que $[x''] \in H^p(C''')$ é tal que $\partial^p([x'']) = 0$. Sendo então $x' \in C''^p$ tal que $\mu^p(x') = x''$ e $x \in C^{p+1}$ tal que $\lambda^{p+1}(x) = d'^p(x')$, tem-se $0 = [x]$, ou seja existe $y \in C^p$ tal que $d^p(y) = x$. Tem-se então

$$d'^p(x' - \lambda^p(y)) = d'^p(x') - \lambda^{p+1}(d^p(y)) = 0,$$

o que mostra que $x' - \lambda^p(y) \in Z^p(C'')$ e, para o correspondente elemento $[x' - \lambda^p(y)] \in H^p(C'')$, vem

$$H^p(\mu^\bullet)([x' - \lambda^p(y)]) = [\mu^p(x' - \lambda^p(y))] = [x''],$$

o que mostra que $[x'']$ está na imagem de $H^p(\mu^\bullet)$.

d) Vamos verificar, por fim, a exactidão da sucessão exacta de cohomologia em $H^{p+1}(C^\bullet)$, isto é, que a imagem de $\partial^p: H^p(C''') \rightarrow H^{p+1}(C^\bullet)$ coincide com o núcleo de $H^{p+1}(\lambda^\bullet): H^{p+1}(C^\bullet) \rightarrow H^{p+1}(C'')$.

Um elemento de $H^{p+1}(C^\bullet)$ na imagem de ∂^p vai ser um elemento da forma $[x]$, para o qual existe $x'' \in Z^p(C''^\bullet)$ e $x' \in C'^p$, tais que $\mu^p(x') = x''$ e $\lambda^{p+1}(x) = d'^p(x')$, tendo-se então

$$H^{p+1}(\lambda^\bullet)([x]) = [\lambda^{p+1}(x)] = [d'^p(x')] = 0,$$

o que mostra que ele está no núcleo de $H^{p+1}(\lambda^\bullet)$.

Suponhamos, reciprocamente, que $[x] \in H^{p+1}(C^\bullet)$ pertence ao núcleo de $H^{p+1}(\lambda^\bullet)$, portanto que se tem $[\lambda^{p+1}(x)] = 0$, ou seja, que existe $x' \in C'^p$ tal que $\lambda^{p+1}(x) = d'^p(x')$. Tem-se então

$$d''^p(\mu^p(x')) = \mu^{p+1}(d'^p(x')) = \mu^{p+1}(\lambda^{p+1}(x)) = 0,$$

ou seja, $\mu^p(x') \in Z^p(C''^\bullet)$, e, pela definição de ∂^p , vem, para o correspondente $[\mu^p(x')] \in H^p(C''^\bullet)$, $\partial^p([\mu^p(x')]) = [x]$, o que mostra que $[x]$ pertence à imagem de ∂^p . \square

IV.3.3. (Nota) Para quem encontra estes assuntos pela primeira vez, talvez valha a pena explicar melhor a razão por que afirmamos que a sucessão exacta de cohomologia pode ser prolongada indefinidamente nos dois sentidos. O que se passa é que, por definição, o facto de uma sucessão “longa” ser exacta reduz-se à exactidão de cada sucessão associada a duas aplicações lineares consecutivas e, como é imediato realizar, essas sucessões de duas aplicações lineares consecutivas que aparecem na sucessão referida no enunciado, quando se consideram os diferentes valores de p são exactamente as mesmas que aparecem quando se considera uma única sucessão, indefinidamente prolongada nos dois sentidos. Nesta ordem de ideias, o resultado anterior ficaria enunciado de modo equivalente se tivéssemos, por exemplo, afirmado a exactidão, para cada p , da sucessão

$$H^{p-1}(C''^\bullet) \xrightarrow{\partial^{p-1}} H^p(C^\bullet) \xrightarrow{H^p(\lambda^\bullet)} H^p(C'^\bullet) \xrightarrow{H^p(\mu^\bullet)} H^p(C''^\bullet) \xrightarrow{\partial^p} H^{p+1}(C^\bullet).$$

IV.3.4. Sejam $M \subset E$ uma variedade e U e V abertos de M tais que $U \cup V = M$. Notemos $\Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V)$ o complexo de cocadeias produto de $\Omega^\bullet(U)$ e $\Omega^\bullet(V)$ construído a partir dos produtos cartesianos $\Omega^p(U) \times \Omega^p(V)$. Tem então lugar uma sucessão exacta curta de complexos de cocadeias

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{\lambda^\bullet} \Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V) \xrightarrow{\mu^\bullet} \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0$$

em que as aplicações lineares

$$\begin{aligned} \lambda^p: \Omega^p(M) &\rightarrow \Omega^p(U) \times \Omega^p(V) \\ \mu^p: \Omega^p(U) \times \Omega^p(V) &\rightarrow \Omega^p(U \cap V) \end{aligned}$$

estão definidas por $\lambda^p(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V)$, $\mu^p(\alpha, \beta) = \beta|_{U \cap V} - \alpha|_{U \cap V}$.

Dem: Do facto de, para cada $(\alpha, \beta) \in \Omega^p(U) \times \Omega^p(V)$, se ter $d^p(\alpha, \beta) = (d^p(\alpha), d^p(\beta))$, deduz-se imediatamente que λ^\bullet e μ^\bullet são efectivamente

morfismos de complexos de cocadeias. O facto de cada λ^p ser uma aplicação linear injectiva resulta de que, se $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ é uma forma diferencial de grau p tal que $\omega_x = 0$, para cada $x \in U$ e para cada $x \in V$, então $\omega_x = 0$, para cada $x \in M$, isto é, $\omega = 0$. Uma vez que, para cada $\omega \in \Omega^p(M)$, as formas diferenciais $\omega|_U$ e $\omega|_V$ têm a mesma restrição $\omega|_{U \cap V}$ a $U \cap V$, concluímos que se tem $\mu^p \circ \lambda^p = 0$, e portanto que a imagem da aplicação linear λ^p está contida no núcleo da aplicação linear μ^p . Reciprocamente, se $\mu^p(\alpha, \beta) = 0$, tem-se $\alpha_x = \beta_x$, para cada $x \in U \cap V$ o que nos garante que se pode definir uma forma diferencial ω sobre M pela condição de se ter $\omega_x = \alpha_x$, para cada $x \in U$, e $\omega_x = \beta_x$, para cada $x \in V$, a suavidade de ω resultando então do facto de a suavidade ser uma questão local; tem-se então $(\alpha, \beta) = \lambda^p(\omega)$, o que mostra que (α, β) pertence à imagem de λ^p . Resta-nos provar que a aplicação linear μ^p é sobrejectiva, para o que recorreremos ao teorema da partição da unidade. Por este resultado, podemos considerar duas aplicações suaves $\varphi, \psi: M \rightarrow [0, 1]$, a primeira nula fora de um certo subconjunto A de U , fechado em M , e a segunda nula fora de um certo subconjunto B de V , também fechado em M , tais que, para cada $x \in M$, $\varphi(x) + \psi(x) = 1$. Seja então $\gamma \in \Omega^p(U \cap V)$ e definamos formas diferenciais $\alpha \in \Omega^p(U)$ e $\beta \in \Omega^p(V)$ por

$$\alpha_x = \begin{cases} -\psi(x) \gamma_x, & \text{se } x \in V \\ 0, & \text{se } x \notin V \end{cases} \quad \beta_x = \begin{cases} \varphi(x) \gamma_x, & \text{se } x \in U \\ 0, & \text{se } x \notin U \end{cases}$$

(a suavidade de α resulta de que ela tem restrições suaves aos abertos $U \cap V$ e $U \cap (M \setminus B)$ de U , com união U , a segunda por ser identicamente nula, e a suavidade de β tem justificação análoga). Uma vez que, para cada $x \in U \cap V$,

$$\beta_x - \alpha_x = \varphi(x) \gamma_x + \psi(x) \gamma_x = \gamma_x,$$

concluímos que $\mu^p(\alpha, \beta) = \gamma$, o que termina a demonstração. \square

IV.3.5. Nas hipóteses de IV.3.4, à sucessão exacta curta de complexos de cocadeias aí referida fica associada a correspondente sucessão exacta de cohomologia, indefinidamente prolongável nos dois sentidos,

$$H^{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial^{p-1}} H^p(M) \xrightarrow{H^p(\lambda^*)} H^p(\Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V)) \xrightarrow{H^p(\mu^*)} H^p(U \cap V) \xrightarrow{\partial^p} H^{p+1}(M),$$

a que se dá o nome de *sucessão exacta de Mayer-Vietoris* associada aos abertos U e V de M (repare-se que utilizámos a “secção representativa” da sucessão exacta de cohomologia referida na nota IV.3.3⁴⁹). Lembremos, a propósito, que, de acordo com IV.2.5, o espaço de cohomologia $H^p(\Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V))$ é um produto de $H^p(U)$ e $H^p(V)$, com as projecções naturalmente definidas, e portanto é isomorfo ao produto cartesiano $H^p(U) \times H^p(V)$, pelo isomorfismo que associa $([\alpha], [\beta])$ a $([\alpha, \beta])$.

⁴⁹Por razões exclusivamente tipográficas...

Uma das aplicações típicas da sucessão exacta de Mayer-Vietoris é a possibilidade de calcular explicitamente os espaços de cohomologia de certas variedades, como, por exemplo, as hipersuperfícies esféricas. Começamos por fazer algumas observações preliminares sobre as projecções estereográficas.

IV.3.6. Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$ e $S \subset E$ a hipersuperfície esférica de centro 0 e raio 1,

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

Sejam $y \in S$ fixado e $F \subset E$ o subespaço vectorial de dimensão $n - 1$ complementar ortogonal de $\mathbb{R}y$. Tem-se então um difeomorfismo $f: S \setminus \{y\} \rightarrow F$ (a *projecção estereográfica* a partir de y), definido por

$$f(x) = y + \frac{1}{1 - \langle x, y \rangle} (x - y),^{50}$$

o difeomorfismo inverso sendo a aplicação $g: F \rightarrow S \setminus \{y\}$, definida por

$$g(z) = y + \frac{2}{1 + \langle z, z \rangle} (z - y).$$

Dem: Começemos por reparar que, se $x, y \in S$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que $|\langle x, y \rangle| \leq 1$ e que $|\langle x, y \rangle| = 1$ se, e só se, $x = \pm y$, em particular $\langle x, y \rangle = 1$ se, e só se, $x = y$. Fica assim bem definida uma aplicação suave $f: S \setminus \{y\} \rightarrow E$ pela fórmula do enunciado e verifica-se facilmente que $f(x) \in F$ e, mais precisamente, que $f(x)$ é o único elemento de F da forma $y + t(x - y)$, para algum $t \in \mathbb{R}$, isto é, o único elemento de F que pertence à recta afim que contém x e y (resolver a equação linear $\langle (1 - t)y + tx, y \rangle = 0$). Reparemos agora que, para cada $z \in F$, existe um único elemento de $S \setminus \{y\}$ na recta afim que contém y e z , nomeadamente o elemento $g(z)$ definido no enunciado. Para isso, tudo o que temos que reparar é que a equação

$$\langle (1 - s)y + sz, (1 - s)y + sz \rangle = 1$$

é uma equação do segundo grau em s que admite a solução 0, correspondente ao ponto y , e a solução $2/(1 + \langle z, z \rangle)$, correspondente ao ponto $g(z)$. As caracterizações geométricas de f e g atrás descritas mostram que a aplicação f é uma bijecção de $S \setminus \{y\}$ sobre F e que a sua inversa é g , pelo que concluímos, em particular, que f é um difeomorfismo. \square

IV.3.7. Como corolário do resultado precedente, podemos concluir que, para cada $y \in S$, $S \setminus \{y\}$ é uma variedade conexa e que, no caso em que $n \geq 2$, a

⁵⁰Geometricamente, $f(x)$ é o único ponto da recta afim, que contém x e y , que pertence ao subespaço F .

variedade S é também conexa.

Dem: O facto de a variedade $S \setminus \{y\}$ ser conexo vem de que é difeomorfa ao espaço vectorial F , que é convexo, e portanto conexo. No caso em que $n \geq 2$, o facto de S ser conexa é uma consequência de $S \setminus \{y\}$ ser denso em S , o que ficará provado se mostrarmos a existência de uma sucessão de elementos de $S \setminus \{y\}$ convergente para y . Para o verificarmos, basta considerar um vector $w \in S$, com $\langle w, y \rangle = 0$ e definir a sucessão de termo geral

$$y_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)y + \sin\left(\frac{1}{n}\right)w. \square$$

IV.3.8. Consideremos agora o caso particular em que $E = \mathbb{R}^n$, onde $n \geq 1$, com o produto interno usual, caso em que a hipersuperfície esférica é habitualmente notada S^{n-1} . Notando, como é usual, e_1, \dots, e_n a base canónica de \mathbb{R}^n , é frequente neste caso considerar-se as projecções estereográficas realtivas ao “polo norte” e_n e ao “polo sul” $-e_n$, as quais, identificando, como é usual, \mathbb{R}^n ao produto $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, vão ter ambas com contradomínio o espaço vectorial $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Compondo estas projecções com o isomorfismo natural de $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ sobre \mathbb{R}^{n-1} , definido por $(x, 0) \mapsto x$, obtemos então difeomorfismos, chamados ainda de *projecções estereográficas*,

$$f_+: S^{n-1} \setminus \{e_n\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \quad f_-: S^{n-1} \setminus \{-e_n\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1},$$

que se verifica facilmente estarem definidos por

$$f_+(x, t) = \frac{x}{1-t}, \quad f_-(x, t) = \frac{x}{1+t},$$

as respectivas inversas,

$$g_+: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \setminus \{e_n\}, \quad g_-: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \setminus \{-e_n\},$$

estando definidas por

$$g_+(z) = \left(\frac{2z}{1 + \langle z, z \rangle}, \frac{\langle z, z \rangle - 1}{1 + \langle z, z \rangle} \right), \quad g_-(z) = \left(\frac{2z}{1 + \langle z, z \rangle}, \frac{1 - \langle z, z \rangle}{1 + \langle z, z \rangle} \right).$$

Podemos agora passar ao cálculo dos espaços de cohomologia das hipersuperfícies esféricas, começando com o caso trivial, mas diferente dos outros, de S^0 .

IV.3.9. Considerando a hipersuperfície esférica $S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$, tem-se $H^p(S^0) = \{0\}$, para cada $p \neq 0$, e $H^0(S^0)$ é um espaço vectorial de dimensão 2, admitindo uma base $[\varphi_+], [\varphi_-]$, onde $\varphi_+, \varphi_-: \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ são as aplicações definidas por $\varphi_+(1) = 1, \varphi_+(-1) = 0, \varphi_-(1) = 0,$

$$\varphi_-(-1) = 1.$$

Dem: Este resultado não é mais do que um caso particular de IV.1.4, se repararmos que S^0 é uma variedade de dimensão 0, cujas componentes conexas são $\{1\}$ e $\{-1\}$. \square

IV.3.10. Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m compacta, sem bordo, suavemente orientada. Sendo \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , o corpo dos escalares que se está a considerar, existe então uma aplicação linear $f: H^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $f([\omega]) = \int_M \omega$. Se $M \neq \emptyset$, esta aplicação é sobrejectiva, em particular, $H^m(M) \neq \{0\}$.

Dem: O facto de a variedade M ser compacta e suavemente orientada implica que, para cada $\omega \in \Omega^m(M) = Z^m(\Omega^\bullet(M))$, está bem definido o integral $\int_M \omega \in \mathbb{K}$. Por outro lado, se for $[\omega] = [\omega']$ em $H^m(M)$, existe $\rho \in \Omega^{m-1}(M)$ tal que $\omega' - \omega = d\rho$ e então, pelo teorema de Stokes e uma vez que $\partial_1(M) = \emptyset$,

$$\int_M \omega' - \int_M \omega = \int_M d\rho = \int_{\partial_1(M)} \rho / \partial_1(M) = 0,$$

donde $\int_M \omega = \int_M \omega'$. Fica assim bem definida a aplicação $f: H^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$, sendo trivial constatar que se trata de uma aplicação linear. Por fim, se $M \neq \emptyset$, a sobrejectividade desta aplicação linear resulta de que, sendo $Vol_M \in \Omega^m(M) = Z^m(\Omega^\bullet(M))$ o elemento de volume de M , tem-se

$$f([Vol_M]) = \int_M Vol_M = \int_M 1 d\mu_M(x) = \mu_M(M) \neq 0. \square$$

IV.3.11. **(Lema) a)** Dada uma sucessão exacta de espaços vectoriais do tipo

$$E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G,$$

com E e G com dimensões finitas p e q , tem-se que F tem dimensão finita menor ou igual a $p + q$.

b) Dados $n \geq 1$ e uma sucessão exacta de espaços vectoriais do tipo

$$\{0\} \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\lambda_1} E_2 \xrightarrow{\lambda_2} E_3 \xrightarrow{\lambda_3} \dots \xrightarrow{\lambda_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{\lambda_{n-1}} E_n \longrightarrow \{0\},$$

onde cada E_j tem dimensão finita p_j , tem-se $\sum_{j=1}^n (-1)^j p_j = 0$.

Dem: a) Sendo $F' \subset F$ o subespaço vectorial imagem de λ , que coincide com o núcleo de μ , obtemos, por passagem ao quociente de μ , uma aplicação linear injectiva $\hat{\mu}: F/F' \rightarrow G$, o que implica que F/F' tem dimensão finita menor ou igual a q . O facto de F' ser a imagem da aplicação linear λ implica que F' tem dimensão finita menor ou igual a p . Considerando agora a sucessão exacta curta

$$\{0\} \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F/F' \longrightarrow \{0\},$$

deduzimos de II.7.22 que F tem dimensão finita igual à soma das dimensões de F' e de F/F' , portanto menor ou igual a $p + q$.

b) Começemos por ver que esta afirmação é trivialmente verdadeira nos casos em que $n = 1$ ou $n = 2$, no primeiro caso, uma vez que, para uma sucessão exacta do tipo $\{0\} \longrightarrow E_1 \longrightarrow \{0\}$, a segunda aplicação linear é injectiva e portanto $E_1 = \{0\}$, e, no segundo caso, uma vez que, para uma sucessão exacta do tipo $\{0\} \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\lambda_1} E_2 \longrightarrow \{0\}$, λ_1 é um isomorfismo. A afirmação é também verdadeira para $n = 3$, tendo em conta II.7.22. Façamos então a demonstração por indução em n , supondo que o resultado é válido para um certo $n \geq 3$ e examinando o que sucede quando temos uma sucessão exacta do tipo

$$\{0\} \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\lambda_1} E_2 \xrightarrow{\lambda_2} E_3 \xrightarrow{\lambda_3} \cdots \xrightarrow{\lambda_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{\lambda_{n-1}} E_n \xrightarrow{\lambda_n} E_{n+1} \longrightarrow \{0\}.$$

Consideramos então o subespaço vectorial $E'_n \subset E_n$ imagem da aplicação linear λ_{n-1} , que é também o núcleo da aplicação linear λ_n , e reparamos que se podem então considerar as sucessões exactas

$$\begin{aligned} \{0\} &\longrightarrow E_1 \xrightarrow{\lambda_1} E_2 \xrightarrow{\lambda_2} E_3 \xrightarrow{\lambda_3} \cdots \xrightarrow{\lambda_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{\lambda_{n-1}} E'_n \longrightarrow \{0\} \\ \{0\} &\longrightarrow E'_n \xrightarrow{\iota} E_n \xrightarrow{\lambda_n} E_{n+1} \longrightarrow \{0\}. \end{aligned}$$

Sendo p'_n a dimensão de E'_n , deduzimos, pela hipótese de indução, que se tem $(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j p_j) + (-1)^n p'_n = 0$ e, tendo em conta, mais uma vez, II.7.22, que $p'_n = p_n - p_{n+1}$. Substituindo esta última igualdade na anterior, obtemos finalmente o resultado. \square

IV.3.12. Seja $n \geq 0$ e consideremos na hipersuperfície esférica $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a orientação suave que lhe vem de ser bordo da bola fechada de centro 0 e raio 1. Tem-se então:

a) Se $n = 0$, $H^0(S^0) = H^0(\{-1, 1\})$ é um espaço vectorial de dimensão 2, admitindo uma base $[\varphi_+], [\varphi_-]$, onde $\varphi_+, \varphi_-: S^0 \rightarrow \mathbb{R}$ são as aplicações definidas por $\varphi_+(1) = \varphi_-(-1) = 1$ e $\varphi_+(-1) = \varphi_-(1) = 0$.

b) Se $n \geq 1$, $H^0(S^n)$ é um espaço vectorial de dimensão 1, admitindo como base a classe de equivalência da função $S^n \rightarrow \mathbb{K}$ de valor constante 1.

c) Se $n \geq 1$, $H^n(S^n)$ é um espaço vectorial de dimensão 1, admitindo como base a classe de equivalência do elemento de volume de S^n e $f: H^n(S^n) \rightarrow \mathbb{K}$ é um isomorfismo.

d) Para cada $p \neq 0, n$, $H^p(S^n) = \{0\}$.

Dem: A conclusão de a), tal como a conclusão de d), no caso em que $n = 0$, já foi estabelecida em IV.3.9. Supomos assim, a partir de agora, que se tem $n \geq 1$. A conclusão de b) é uma consequência de S^n ser uma variedade conexa e não vazia, tendo em conta, IV.1.4. Reparemos também que, para a

alínea c), tudo o que temos que verificar é que $H^n(S^n)$ tem dimensão 1, visto que o facto de a aplicação linear $f: H^n(S^n) \rightarrow \mathbb{K}$ ser sobrejectiva implica então que ela é um isomorfismo e o facto de a classe de equivalência do elemento de volume ser aplicada por f em $\sigma_n \neq 0$ implica então que essa classe de equivalência constitui uma base. A fim de demonstrarmos as alíneas c) e d), utilizando a sucessão exacta de Mayer-Vietoris, vamos olhar para S^n como união dos subconjuntos abertos $S^+ = S^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ e $S^- = S^n \setminus \{e_{n+1}\}$, que vão ser variedades contrácteis, por serem difeomorfas a \mathbb{R}^n através das projecções estereográficas f_- e f_+ referidas em IV.3.8 (cf. as alíneas a) e b) de III.7.8). Por IV.1.13, sabemos assim que $H^0(S^+)$ e $H^0(S^-)$ são espaços vectoriais de dimensão 1 e que os restantes espaços de cohomologia destas variedades são $\{0\}$. No que diz respeito à intersecção $S^+ \cap S^- = S^n \setminus \{e_n, -e_n\}$, vemos que ela contém a variedade $S^{n-1} \times \{0\}$, naturalmente difeomorfa a S^{n-1} , e vamos verificar que, para a inclusão $\iota: S^{n-1} \times \{0\} \rightarrow S^+ \cap S^-$, cada

$$H^p(\iota): H^p(S^+ \cap S^-) \rightarrow H^p(S^{n-1} \times \{0\})$$

é um isomorfismo, o que provará que cada $H^p(S^+ \cap S^-)$ é isomorfo a $H^p(S^{n-1})$. Para o verificarmos, identificamos, do modo usual, \mathbb{R}^{n+1} a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e consideramos a aplicação suave $\rho: S^+ \cap S^- \rightarrow S^{n-1} \times \{0\}$ definida por $\rho(x, t) = (\frac{x}{\|x\|}, 0)$. Vem $\rho \circ \iota = Id: S^{n-1} \times \{0\} \rightarrow S^{n-1} \times \{0\}$ e a aplicação $\iota \circ \rho: S^+ \cap S^- \rightarrow S^+ \cap S^-$ é suavemente homotópica à identidade⁵¹, através da homotopia $H: [0, 1] \times (S^+ \cap S^-) \rightarrow S^+ \cap S^-$ definida por

$$H(s, (x, t)) = \left(\frac{x\sqrt{1-s^2t^2}}{\|x\|}, st \right).$$

Concluimos daqui que

$$\begin{aligned} H^p(\iota) \circ H^p(\rho) &= H^p(\rho \circ \iota): H^p(S^{n-1} \times \{0\}) \rightarrow H^p(S^{n-1} \times \{0\}) \\ H^p(\rho) \circ H^p(\iota) &= H^p(\iota \circ \rho): H^p(S^+ \cap S^-) \rightarrow H^p(S^+ \cap S^-) \end{aligned}$$

são as aplicações identidade, o que mostra que $H^p(\iota)$ é realmente um isomorfismo, com inverso $H^p(\rho)$.

Podemos agora passar à demonstração de c) e d), que será feita por indução em n . Para $n = 1$, d) é trivial, tendo em conta IV.1.4, e, quanto a c), podemos considerar a seguinte parte da sucessão exacta de Mayer-Vietoris

$$\{0\} \rightarrow H^0(S^1) \rightarrow H^0(\Omega^\bullet(S^+) \times \Omega^\bullet(S^-)) \rightarrow H^0(S^+ \cap S^-) \rightarrow H^1(S^1) \rightarrow \{0\}$$

(lembrar que o espaço vectorial $H^1(\Omega^\bullet(S^+) \times \Omega^\bullet(S^-))$ é isomorfo a $H^1(S^+) \times H^1(S^-) = \{0\}$), para a qual sabemos que $H^0(S^1)$ tem dimensão

⁵¹Em particular, a inclusão ι é invertível, módulo homotopia suave, no sentido do exercício IV.1 adiante.

1, que $H^0(\Omega^\bullet(S^+) \times \Omega^\bullet(S^-))$, sendo isomorfo a $H^0(S^+) \times H^0(S^-)$, tem dimensão 2 e que $H^0(S^+ \cap S^-)$, sendo isomorfo a $H^0(S^0) = H^0(\{-1, 1\})$, tem dimensão 2, o que nos permite deduzir, por IV.3.11, que $H^1(S^1)$ tem efectivamente dimensão 1. Suponhamos, por fim, que c) e d) são válidos para um certo valor de $n \geq 1$ e vejamos o que se passa com S^{n+1} . Como no caso de S^1 , podemos considerar a seguinte parte da sucessão exacta de Mayer-Vietoris

$$\{0\} \rightarrow H^0(S^{n+1}) \rightarrow H^0(\Omega^\bullet(S^+) \times \Omega^\bullet(S^-)) \rightarrow H^0(S^+ \cap S^-) \rightarrow H^1(S^{n+1}) \rightarrow \{0\}.$$

Como então $H^0(S^{n+1})$ tem dimensão 1 e $H^0(\Omega^\bullet(S^+) \times \Omega^\bullet(S^-))$ tem dimensão 2, mas já $H^0(S^+ \cap S^-)$, sendo isomorfo a $H^0(S^n)$, vai agora ter dimensão 1 pelo que o que concluímos de IV.3.11 é que $H^1(S^{n+1})$ tem dimensão 0, ou seja, $H^1(S^{n+1}) = \{0\}$. Para cada $p > 1$, podemos escolher a seguinte parte da sucessão exacta de Mayer-Vietoris

$$\{0\} \rightarrow H^{p-1}(S^+ \cap S^-) \rightarrow H^p(S^{n+1}) \rightarrow \{0\},$$

uma vez que $H^p(\Omega^\bullet(S^+) \times \Omega^\bullet(S^-))$ é isomorfo a $H^p(S^+) \times H^p(S^-) = \{0\}$ e que $H^{p-1}(\Omega^\bullet(S^+) \times \Omega^\bullet(S^-))$ é isomorfo a $H^{p-1}(S^+) \times H^{p-1}(S^-) = \{0\}$. Daqui se deduz que $H^p(S^{n+1})$ é isomorfo a $H^{p-1}(S^+ \cap S^-)$ que, como dissemos, é isomorfo a $H^{p-1}(S^n)$ pelo que, tendo em conta a hipótese de indução, $H^p(S^{n+1}) = \{0\}$, para cada $p \neq n+1$, e $H^{n+1}(S^{n+1})$ é um espaço vectorial de dimensão 1. \square

IV.3.13. (Corolário) Seja $n \geq 1$ e notemos $\iota: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a inclusão e $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ a aplicação suave definida por $f(x) = x/\|x\|$. Tem-se então:

a) Se $n = 1$, $H^p(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{0\}$, para cada $p \neq 0$, e $H^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ é um espaço vectorial de dimensão 2, admitindo uma base $[\varphi_+], [\varphi_-]$, onde $\varphi_+, \varphi_-: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ são as aplicações suaves que tomam, respectivamente, o valor 1 no números positivos e o valor 0 nos negativos e o valor 1 nos números negativos e o valor 0 nos positivos.

b) Se $n \geq 2$, $H^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é um espaço vectorial de dimensão 1, admitindo como base a classe de equivalência da função de valor constante 1.

c) Se $n \geq 2$, $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ é um espaço vectorial de dimensão 1, admitindo como base $[\Omega]$, onde $\Omega = f^*Vol_{S^{n-1}}$ é a forma diferencial ângulo sólido (cf. III.9.16).

d) Para cada $p \neq 0, n-1$, $H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \{0\}$.

Dem: Trata-se de uma consequência do resultado anterior, se mostrarmos que

$$\begin{aligned} H^p(\iota): H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\rightarrow H^p(S^{n-1}) \\ H^p(f): H^p(S^{n-1}) &\rightarrow H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \end{aligned}$$

são isomorfismos inversos um do outro. Ora, tendo em conta a igualdade $f \circ \iota = Id: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, vem

$$H^p(\iota) \circ H^p(f) = Id: H^p(S^{n-1}) \rightarrow H^p(S^{n-1})$$

e, uma vez que $\iota \circ f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é suavemente homotópica à identidade, pela homotopia $H: [0, 1] \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definida por

$$H(s, x) = \frac{x}{1 - s + s\|x\|},$$

tem-se também

$$H^p(f) \circ H^p(\iota) = Id: H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

donde o resultado. \square

§4. Cohomologia com suporte compacto.

IV.4.1. Seja $M \subset E$ uma variedade. Diz-se que uma forma diferencial suave de grau p , $\omega = (\omega_x)_{x \in M}$ tem *suporte compacto* se existir um compacto $K \subset M$ tal que $\omega_{/(M \setminus K)} = 0$. É claro que, quando a variedade M for compacta, toda a forma diferencial suave tem suporte compacto (tomar $K = M$).

Para cada $p \geq 0$, notamos $\Omega_c^p(M)$ o subconjunto de $\Omega^p(M)$ constituído pelas formas diferenciais suaves de grau p com suporte compacto (acrescentando-se uma referência a \mathbb{R} ou \mathbb{C} quando for importante sublinhar qual o corpo que se está a considerar), sendo imediato realizar-se que $\Omega_c^p(M)$ é um subespaço vectorial de $\Omega^p(M)$ (lembrar que o vazio é um compacto contido em M e que a união de dois subconjuntos compactos de M é ainda um subconjunto compacto de M). Para cada $p < 0$, pomos, naturalmente, $\Omega_c^p(M) = \Omega^p(M) = 0$.

Se $\omega \in \Omega_c^p(M)$, então $d^p(\omega) \in \Omega_c^{p+1}(M)$, visto que, se $K \subset M$ é um compacto tal que $\omega_{/(M \setminus K)} = 0$, tem-se também $(d\omega)_{/(M \setminus K)} = d(\omega_{/(M \setminus K)}) = 0$. Podemos assim considerar um novo complexo de cocadeias $\Omega_c^\bullet(M)$ definido pela família dos subespaços vectoriais $\Omega_c^p(M) \subset \Omega^p(M)$ e pelos operadores de cobordo restrições dos operadores de cobordo $d^p: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$,⁵² complexo de cocadeias a que se dá o nome de *complexo de de Rham com suporte compacto* de M . Os espaços vectoriais $Z^p(\Omega_c^\bullet(M))$, $B^p(\Omega_c^\bullet(M))$ e $H^p(\Omega_c^\bullet(M))$ são notados com frequência mais simplesmente $Z_c^p(M)$, $B_c^p(M)$ e $H_c^p(M)$ e diz-se que os espaços vectoriais $H_c^p(M)$ são os *espaços de cohomologia de de Rham com suporte compacto* da variedade M .

É claro que, se M tem dimensão m vem ainda $H_c^p(M) = \{0\}$, para $p > m$ e $p < 0$, e que, se M é compacta, os espaços de cohomologia com suporte

⁵²Temos portanto um subcomplexo de cocadeias, noção cuja definição geral é evidente.

compacto $H_c^p(M)$ coincidem com os espaços de cohomologia ordinária $H^p(M)$.

IV.4.2. Do facto de se ter $\Omega_c^p(M) \subset \Omega^p(M)$ e de os operadores de cobordo de $\Omega_c^p(M)$ serem restrições dos de $\Omega^p(M)$ resulta trivialmente que se tem também $Z_c^p(M) \subset Z^p(M)$ e $B_c^p(M) \subset B^p(M)$. Note-se, no entanto, que, enquanto que $Z_c^p(M) = Z^p(M) \cap \Omega_c^p(M)$, em geral $B_c^p(M)$ estará estritamente contido em $B^p(M) \cap \Omega_c^p(M)$. O que se passa é que se um elemento $\omega \in \Omega_c^p(M)$ for da forma $d\rho$, nada nos garante que a forma diferencial ρ tenha suporte compacto.

IV.4.3. O que se disse atrás poder-nos-ia levar a pensar que $H_c^p(M) \subset H^p(M)$. É no entanto fácil de compreender que isso não tem nada de acontecer em geral. De facto, existe uma aplicação linear canónica $H_c^p(M) \rightarrow H^p(M)$, definida por $[\omega] \mapsto [\omega]$,⁵³ para cada $\omega \in Z_c^p(M) \subset Z^p(M)$, aplicação que claramente não tem que ser sobrejectiva, mas que também não tem que ser injectiva, na medida em que, para $\omega \in Z_c^p(M)$ pode-se ter $[\omega] = 0$ em $H^p(M)$ e $[\omega] \neq 0$ em $H_c^p(M)$, pela razão já referida no fim de IV.4.2.

Ao contrário do que sucede com a cohomologia de de Rham usual, a cohomologia com suporte compacto não se comporta bem com as aplicações suaves gerais entre variedades. O problema está em que, se $f: M' \rightarrow M$ é uma aplicação suave entre variedades e $\omega \in \Omega_c^p(M)$, a forma diferencial imagem recíproca $f^*\omega \in \Omega^p(M')$ não tem que ter suporte compacto (se $K \subset M$ é um compacto tal que $\omega_y = 0$, para cada $y \in M \setminus K$, então $(f^*\omega)_x = 0$, para cada $x \in M' \setminus f^{-1}(K)$, mas o conjunto $f^{-1}(K)$, apesar de fechado em M' , não tem que ser compacto). Para podermos trabalhar com imagens recíprocas ao nível das formas diferenciais de suporte compacto, temos que nos restringir a aplicações suaves com uma propriedade especial.

IV.4.4. Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ duas variedades. Diz-se que uma aplicação $f: M' \rightarrow M$ é *própria* se é contínua e, para cada compacto $K \subset M$, o subconjunto $f^{-1}(K) \subset M'$ é também compacto.⁵⁴ Como exemplos triviais de aplicações próprias, temos os seguintes:

- a) Se a variedade M' é compacta, toda a aplicação contínua $f: M' \rightarrow M$ é própria.⁵⁵
- b) Se $f: M' \rightarrow M$ é um homeomorfismo, então f é uma aplicação própria.
- c) Se M' é uma subvariedade fechada de M , então a inclusão $M' \rightarrow M$ é

⁵³É claro que a classe de equivalência de ω é tomada em dois sentidos diferentes.

⁵⁴É claro que esta definição pode ser apresentada, mais geralmente, no caso em que M e M' são simplesmente espaços topológicos. As condições de termos um espaço separado ou de termos um espaço localmente compacto seriam, no entanto, necessárias para a validade de alguns dos resultados que referiremos.

⁵⁵Pelo contrário, se a variedade M' não é compacta, uma aplicação constante $f: M' \rightarrow M$ não é própria.

uma aplicação própria.

d) Se as aplicações $g: M'' \rightarrow M'$ e $f: M' \rightarrow M$ são próprias, então a composta $f \circ g: M'' \rightarrow M$ é também própria.

Dem: Para alínea a), atendemos a que, se $K \subset M$ é compacto, então K é fechado em M pelo que $f^{-1}(K)$ é fechado em M' , e portanto compacto. Para a alínea b), atendemos a que um conjunto homeomorfo a um compacto é também compacto. Para a alínea c), atendemos a que, se $K \subset M$ é compacto, então a sua imagem recíproca pela inclusão, $M' \cap K$, é fechada em K , e portanto compacta. A alínea d) resulta trivialmente da transitividade das imagens recíprocas. \square

IV.4.5. Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ duas variedades e $f: M' \rightarrow M$ uma aplicação suave própria. Para cada $p \in \mathbb{Z}$ e $\omega \in \Omega_c^p(M)$, tem-se então $f^*\omega \in \Omega_c^p(M')$, pelo que, por restrição das aplicações lineares $f^*: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M')$, obtemos aplicações lineares, $f^*: \Omega_c^p(M) \rightarrow \Omega_c^p(M')$, ainda notadas com a mesma letra, que vão definir trivialmente ainda um morfismo de complexos de cocadeias de $\Omega_c^\bullet(M)$ para $\Omega_c^\bullet(M')$. As correspondentes aplicações lineares ao nível da cohomologia serão notadas

$$H_c^p(f): H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(M').$$

IV.4.6. Tendo em conta a alínea a) de III.1.14, deduzimos que:

a) Sendo $M \subset E$ uma variedade, e $Id_M: M \rightarrow M$ a aplicação identidade, o morfismo de complexos de cocadeias $Id_M^*: \Omega_c^\bullet(M) \rightarrow \Omega_c^\bullet(M)$ é o morfismo identidade, e portanto também cada $H_c^p(Id_M): H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(M)$ é a aplicação linear identidade.

b) Sendo $M \subset E$, $M' \subset E'$ e $M'' \subset E''$ variedades e $f: M'' \rightarrow M'$ e $g: M' \rightarrow M$ aplicações suaves próprias, tem-se que $g \circ f: M'' \rightarrow M$ é uma aplicação suave própria e o morfismo de complexos de cocadeias $(g \circ f)^*: \Omega_c^\bullet(M) \rightarrow \Omega_c^\bullet(M'')$ coincide com o composto $f^* \circ g^*$ dos morfismos de complexos de cocadeias $g^*: \Omega_c^\bullet(M) \rightarrow \Omega_c^\bullet(M')$ e $f^*: \Omega_c^\bullet(M') \rightarrow \Omega_c^\bullet(M'')$, e portanto, para cada p ,

$$H_c^p(g \circ f) = H_c^p(f) \circ H_c^p(g): H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(M'').$$

c) Em consequência, se $g: M' \rightarrow M$ é um difeomorfismo, então $g^*: \Omega_c^\bullet(M) \rightarrow \Omega_c^\bullet(M')$ é um isomorfismo de complexos de cocadeias e portanto, para cada p , $H_c^p(g): H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(M')$ é um isomorfismo, tendo $H_c^p(g^{-1})$ como isomorfismo inverso.

Se, como vimos, a cohomologia de de Rham com suporte compacto põe alguns problemas na operação de imagem recíproca por aplicações suaves arbitrárias, ela vai, em compensação, permitir uma outra operação importante, impossível ao nível de cohomologia de de Rham ordinária.

IV.4.7. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $U \subset E$ um subconjunto aberto. Para cada $\omega \in \Omega_c^p(U)$, podemos considerar uma forma diferencial de suporte compacto $\omega_{\setminus M}$, a que daremos o nome de *extensão trivial* de ω a M , definida por

$$(\omega_{\setminus M})_x = \begin{cases} \omega_x, & \text{se } x \in U \\ 0, & \text{se } x \notin U \end{cases}$$

(sendo $K \subset U$ um compacto fora do qual ω se anule, a extensão trivial também se anula fora de K e a sua suavidade resulta de ter restrições suaves aos abertos U e $M \setminus K$ de M , com união M , a segunda por ser identicamente nula). Ficamos assim com aplicações lineares injectivas $\Omega_c^p(U) \rightarrow \Omega_c^p(M)$, que se definem também, de modo trivial, para $p < 0$, às quais daremos o nome de *injecções canónicas*. Repare-se que, como se realiza imediatamente, a derivada exterior da extensão trivial $\omega_{\setminus M}$ é a extensão trivial da derivada exterior $d\omega$, ou seja $d(\omega_{\setminus M}) = (d\omega)_{\setminus M}$. Concluimos assim que a família das injecções canónicas (que são trivialmente injectivas) constitui um morfismo de complexos de cocadeias de $\Omega_c^\bullet(U)$ para $\Omega_c^\bullet(M)$, ao qual fica associada, para cada inteiro p , uma aplicação linear $H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(M)$, definida por $[\omega] \mapsto [\omega_{\setminus M}]$, que, por razões análogas às referidas em IV.4.3, não tem que ser injectiva nem sobrejectiva.

IV.4.8. Sejam $M \subset E$ uma variedade e $(U_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de M disjuntos dois a dois e de união M . Notando $\iota_j: U_j \rightarrow M$ as inclusões, definidas por $\iota_j(x) = x$, que são aplicações próprias, tem-se então que o complexo de cocadeias $\Omega_c^\bullet(M)$ é uma soma dos complexos de cocadeias $\Omega_c^\bullet(U_j)$, tendo como injecções as famílias de injecções canónicas $\Omega_c^p(U_j) \rightarrow \Omega_c^p(M)$ e como projecções associadas as famílias das aplicações $\iota_j^*: \Omega_c^p(M) \rightarrow \Omega_c^p(U_j)$. Em consequência, para cada p , $H_c^p(M)$ é uma soma dos $H_c^p(U_j)$, definida pelas injecções $H_c^p(U_j) \rightarrow H_c^p(M)$, que estão associadas às injecções canónicas $\Omega_c^p(U_j) \rightarrow \Omega_c^p(M)$, que aplicam cada $[\omega]$ na classe $[\omega_{\setminus M}]$, as projecções associadas sendo as aplicações lineares $H_c^p(\iota_j): H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(U_j)$, que aplicam $[\omega]$ nas classes $[\omega|_{U_j}]$.⁵⁶

Dem: O facto de o complementar de cada U_j ser a união dos restantes abertos, e portanto um conjunto aberto, implica que cada U_j é também fechado em M o que, pela alínea c) de IV.4.4, implica que cada inclusão $\iota_j: U_j \rightarrow M$ é uma aplicação própria. Podemos assim considerar as aplicações lineares associadas $\iota_j^*: \Omega_c^p(M) \rightarrow \Omega_c^p(U_j)$, definidas por $\omega \mapsto \omega|_{U_j}$, e sendo $\sigma_j: \Omega_c^p(U_j) \rightarrow \Omega_c^p(M)$ as injecções canónicas, constatamos que, para cada $\omega \in \Omega_c^p(U_j)$, $\iota_j^*(\sigma_j(\omega)) = \omega$ e, para $k \neq j$, $\iota_k^*(\sigma_j(\omega)) = 0$. Além disso, se $\omega \in \Omega_c^p(M)$ e se $K \subset M$ é um compacto fora

⁵⁶Comparar com IV.2.6 e com as observações feitas a seguir a este resultado.

do qual ω se anula o facto de o compacto K estar contido na união dos abertos U_j implica a existência de uma parte finita J' de J tal que K esteja ainda contido na união dos U_j com $j \in J'$ e daqui deduzimos que, para cada $j \notin J'$, $\sigma_j(\iota_j^*(\omega)) = 0$, verificando-se então facilmente que, para cada $x \in M$,

$$\sum_{j \in J'} \sigma_j(\iota_j^*(\omega))_x = \omega_x$$

(se $x \in U_k$ com $k \notin J'$, ambos os membros são 0 e se $x \in U_k$ com $k \in J'$ só a parcela com $j = k$ do primeiro membro não é obrigatoriamente nula e essa é igual a ω_x). Podemos agora aplicar IV.2.12 para garantir que $\Omega_c^*(M)$ é uma soma dos complexos de cocadeias $\Omega_c^*(U_j)$, tendo como injecções as famílias de injecções canónicas $\sigma_j: \Omega_c^p(U_j) \rightarrow \Omega_c^p(M)$ e como projecções associadas as famílias das aplicação lineares $\iota_j^*: \Omega_c^p(M) \rightarrow \Omega_c^p(U_j)$ e resulta então de IV.2.17 que $H_c^p(M)$ é uma soma dos $H_c^p(U_j)$, definida pelas injecções $H_c^p(\sigma_j^*): H_c^p(U_j) \rightarrow H_c^p(M)$ e que as aplicações $H_c^p(\iota_j): H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(U_j)$ são as projecções associadas. \square

IV.4.9. **a)** Seja M uma variedade conexa, compacta, não vazia. Tem-se então que $H_c^0(M)$ é um espaço vectorial de dimensão 1, admitindo como base a classe de equivalência da aplicação $M \rightarrow \mathbb{R}$ de valor constante 1.

b) Seja M uma variedade conexa, não compacta. Tem-se então $H_c^0(M) = \{0\}$.

c) Seja M uma variedade e seja $(M_j)_{j \in J}$ a família das componentes conexas de M . Seja J' o conjunto dos $j \in J$ tais que M_j é compacto e seja, para cada $j \in J'$, $f_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação suave que toma o valor constante 1 em M_j e que é nula sobre as outras componentes conexas. Tem-se então que as classes $[f_j] \in H_c^0(M)$, com $j \in J'$, constituem uma base de $H_c^0(M)$, que tem portanto dimensão igual a número de elementos de J' , se este é finito, e dimensão infinita, caso contrário.

Dem: A alínea a) é uma consequência de IV.1.4, uma vez que, por a variedade M ser compacta, $H_c^0(M) = H^0(M)$. A alínea b) resulta de se ter então $Z_c^0(M) = \{0\}$, uma vez que, se $f \in Z_c^0(M) \subset Z^0(M)$, então $f: M \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação constante e portanto tem que ser $f = 0$ sem o que, por M não ser compacta, f não se anulava fora duma parte compacta de M . Uma vez que as componentes conexas M_j de M são abertos disjuntos dois a dois e com união M , concluímos de IV.4.8 que $H_c^0(M)$ é uma soma dos $H_c^0(M_j)$, tendo como injecções as aplicações lineares associadas às injecções canónicas $\Omega_c^j(M_j) \rightarrow \Omega_c^j(M)$ e então, por IV.2.8, essas injecções são aplicações lineares injectivas e $H_c^0(M)$ é soma directa dos subespaços imagem destas injecções, o que implica a conclusão de c), tendo em conta a) e b). \square

Verificámos atrás que a cohomologia de de Rham de uma variedade suavemente contráctil é isomorfa à cohomologia de um ponto, ou seja, é nula nos graus diferentes de 0 e com dimensão 1 no grau 0. Para a cohomologia de de Rham com suportes compactos já isso não se passa e, como vamos ver, existem variedades contrácteis com espaços de cohomologia muito diferentes. A razão da diferença de comportamento está no facto de uma variedade contráctil ser uma variedade em que a aplicação identidade é suavemente homotópica a uma aplicação constante mas o facto de esta não ser em geral uma aplicação própria não nos permite tirar partido desse facto para concluirmos alguma coisa sobre a cohomologia com suporte compacto. São razões do mesmo tipo que impedem aliás de aplicar no quadro da cohomologia com suporte compacto outras construções que se utilizam no quadro da cohomologia de de Rham usual.

IV.4.10. (Generalização de IV.3.10) Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade sem bordo de dimensão m , suavemente orientada. Sendo \mathbb{K} , igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} , o corpo dos escalares que se está a considerar, existe então uma aplicação linear $f: H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $f([\omega]) = \int_M \omega$. Se $M \neq \emptyset$, esta aplicação é sobrejectiva, em particular, $H_c^m(M) \neq \{0\}$.

Dem: O facto de cada $\omega \in \Omega_c^m(M) = Z_c^m(M)$ ser integrável é uma consequência de III.4.7. Por outro lado, se for $[\omega] = [\omega']$ em $H_c^m(M)$, existe $\rho \in \Omega_c^{m-1}(M)$ tal que $\omega' - \omega = d\rho$ e então, pelo teorema de Stokes e uma vez que $\partial_1(M) = \emptyset$,

$$\int_M \omega' - \int_M \omega = \int_M d\rho = \int_{\partial_1(M)} \rho / \partial_1(M) = 0,$$

donde $\int_M \omega = \int_M \omega'$. Fica assim bem definida a aplicação $f: H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$, sendo trivial constatar que se trata de uma aplicação linear. Para verificarmos que temos uma aplicação linear sobrejectiva, no caso em que $M \neq \emptyset$, basta verificarmos que ela não é identicamente nula. Fixemos então $x_0 \in M$ e uma vizinhança compacta V de x_0 em M . Pelo teorema da partição da unidade relativo à cobertura aberta de M pelos abertos $\text{int}(V)$ e $M \setminus \{x_0\}$ (interior, relativamente a M), podemos considerar uma aplicação suave $\varphi: M \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = 0$, para cada $x \notin V$ e que $\varphi(x_0) = 1$ e, por $\varphi(x)$ ser estritamente positiva nalguma vizinhança aberta de x_0 , que tem portanto medida não nula, vem $\int_M \varphi(x) d\mu_M(x) > 0$. Sendo então $\omega \in \Omega_c^m(M) = Z_c^m(M)$ a forma diferencial definida por $\omega_x = \varphi(x) \text{Vol}_{T_x(M)}$, vem, para o correspondente $[\omega] \in H_c^m(M)$,

$$f([\omega]) = \int_M \omega = \int_M \varphi(x) d\mu_M(x) > 0,$$

o que termina a demonstração. \square

IV.4.11. Seja $n \geq 0$. Tem-se $H_c^p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$, para cada $p \neq n$, e $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vectorial de dimensão 1, a aplicação linear $f: H_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{K}$ sendo um isomorfismo.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias partes:

a) Começemos por notar que, uma vez que já sabemos que f é uma aplicação linear sobrejectiva, basta-nos, no caso $p = n$, mostrar uma das duas coisas: ou que f é uma aplicação linear injectiva, ou que $H_c^n(\mathbb{R}^n)$ tem dimensão 1.

b) O caso em que $n = 0$ é trivial na medida em que \mathbb{R}^0 é um espaço com um único elemento, em particular compacto, pelo que já conhecemos a dimensão de cada $H_c^p(\mathbb{R}^0) = H^p(\mathbb{R}^0)$. Podemos assim supor que $n \geq 1$.

c) Os casos em que $p < 0$ e $p > n$ são triviais e aquele em que $p = 0$ é uma consequência de IV.4.9, visto que \mathbb{R}^n é conexo e não compacto. Podemos assim supor que $1 \leq p \leq n$.

d) Seja $[\omega] \in H_c^p(\mathbb{R}^n)$, onde $\omega \in Z_c^p(\mathbb{R}^n)$, um elemento arbitrário, se $p \neq n$, ou, se $p = n$, um elemento tal que $f([\omega]) = 0$, isto é, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Vamos mostrar que $[\omega] = 0$, isto é, que $\omega \in B_c^p(\mathbb{R}^n)$, o que provará que $H_c^p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$, para $p \neq n$, e que f é uma aplicação linear injectiva, e terminará a demonstração.

e) O facto de a forma diferencial ω ter suporte compacto implica a existência de $r > 0$ tal que $\omega_x = 0$, sempre que $\|x\| > r$. O facto de se ter $H^p(\mathbb{R}^n) = \{0\}$, por \mathbb{R}^n ser contráctil, implica a existência de uma forma diferencial, não obrigatoriamente de suporte compacto, $\alpha \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega = d\alpha$.

f) Seja

$$U_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > r\},$$

que é um aberto de \mathbb{R}^n tal que $d(\alpha|_{U_r}) = \omega|_{U_r} = 0$. Reparemos que, no caso em que $n \geq 2$, U_r é conexo, por ser homeomorfo a $S^{n-1} \times]r, +\infty[$, pelo homeomorfismo $S^{n-1} \times]r, +\infty[\rightarrow U_r$ definido por $(x, t) \mapsto tx$, cujo inverso está definido por $y \mapsto (y/\|y\|, \|y\|)$.

g) Suponhamos que $p = 1$. A forma diferencial α de grau 0 é portanto uma aplicação suave $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}$ com derivada identicamente nula em U_r . No caso em que $n \geq 2$, o facto de U_r ser conexo implica que α toma um valor constante c em U_r . Vamos ver que o mesmo acontece no caso em que $n = 1$, com uma justificação um pouco mais completa. Ora, uma vez que U_r é a união dos intervalos $]-\infty, -r[$ e $]r, +\infty[$, vemos que α toma o valor constante $\alpha(-r)$ no primeiro intervalo e o valor constante $\alpha(r)$ no segundo intervalo, pelo que o que temos que verificar é que $\alpha(-r) = \alpha(r)$ e isso vai ser uma consequência de que, pelo teorema de Stokes trivial, podemos escrever

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{[-r, r]} d\alpha = \int_{\partial_1([-r, r])} \alpha|_{\{-r, r\}} = \alpha(r) - \alpha(-r).$$

Provámos portanto, em qualquer caso, que α toma um valor constante c em

U_r e portanto que tem lugar uma aplicação suave $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$, identicamente nula em U_r , e portanto de suporte compacto, definida por $\beta(t) = \alpha(t) - c$, tendo-se assim $\beta \in \Omega_c^0(\mathbb{R})$ e $d\beta = \omega$, pelo que $\omega \in B_c^1(\mathbb{R})$, o que termina a demonstração neste caso. Podemos assim, a partir de agora, supor que $n \geq p \geq 2$.

h) Sejam $f: S^{n-1} \rightarrow U_r$ e $g: U_r \rightarrow S^{n-1}$ as aplicações suaves definidas por $f(x) = 2rx$ e $g(x) = x/\|x\|$.⁵⁷ Tem-se $g \circ f = Id$ e $f \circ g: U_r \rightarrow U_r$ é suavemente homotópica à identidade, pela homotopia suave $H: [0, 1] \times U_r \rightarrow U_r$ definida por

$$H(t, x) = \left(\frac{2r(1-t)}{\|x\|} + t \right) x.$$

Daqui se deduz, para os correspondentes $H^p(f): H^p(U_r) \rightarrow H^p(S^{n-1})$ e $H^p(g): H^p(S^{n-1}) \rightarrow H^p(U_r)$, que $H^p(g) \circ H^p(f) = H^p(f \circ g)$ é a identidade de $H^p(U_r)$ e $H^p(f) \circ H^p(g) = H^p(g \circ f)$ é a identidade de $H^p(S^{n-1})$, o que mostra que $H^p(f): H^p(U_r) \rightarrow H^p(S^{n-1})$ é um isomorfismo, tendo como isomorfismo inverso $H^p(g): H^p(S^{n-1}) \rightarrow H^p(U_r)$.

i) Vamos mostrar a existência de $\beta \in \Omega^{p-2}(U_r)$ tal que $d\beta = \alpha|_{U_r}$, ou seja, uma vez que $d(\alpha|_{U_r}) = 0$, que se tem $[\alpha|_{U_r}] = 0$ em $H^{p-1}(U_r)$. No caso em que $p < n$, isso resulta de que $H^{p-1}(U_r)$ é isomorfo a $H^{p-1}(S^{n-1}) = \{0\}$. Supondo então $p = n$, tendo em conta o isomorfismo referido em h), ficamos reduzidos a provar que $[f^*(\alpha|_{U_r})] = H^{p-1}(f)([\alpha|_{U_r}]) = 0$ o que, tendo em conta IV.3.12, é equivalente a provar que

$$\int_{S^{n-1}} f^*(\alpha|_{U_r}) = 0,$$

ou ainda, uma vez que f é um difeomorfismo, conservando as orientações, de S^{n-1} sobre $S_{2r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 2r\}$, considerado com a orientação que lhe vem de ser bordo de índice 1 de $B_{2r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 2r\}$, a provar que

$$\int_{S_{2r}} \alpha|_{S_{2r}} = 0.$$

Mas isso é uma consequência do teorema de Stokes, visto que, por ω ser nula fora de B_{2r} , podemos escrever

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{B_{2r}} \omega = \int_{B_{2r}} d\alpha = \int_{S_{2r}} \alpha|_{S_{2r}}.$$

Ficou assim provada a existência pretendida da forma diferencial β .

j) Pelo teorema da partição da unidade, relativo à cobertura de \mathbb{R}^n pelos

⁵⁷Comparar com a demonstração de IV.3.13.

abertos U_r e $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 2r\}$, podemos considerar uma aplicação suave $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, nula fora de um certo subconjunto $C \subset U_r$, fechado em \mathbb{R}^n , e tal que $\varphi(x) = 1$, para cada x com $\|x\| \geq 2r$. Seja $\widehat{\beta} = (\widehat{\beta}_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$ a forma diferencial suave de grau $p - 2$ definida por

$$\widehat{\beta}_x = \begin{cases} \varphi(x) \beta_x, & \text{se } x \in U_r \\ 0, & \text{se } x \notin U_r \end{cases}$$

a suavidade de $\widehat{\beta}$ resultando de que ela vai ter restrições suaves aos abertos U_r e $\mathbb{R}^n \setminus C$, de união \mathbb{R}^n , a segunda por ser identicamente nula. Sendo agora $\widehat{\alpha} = \alpha - d\widehat{\beta} \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n)$, tem-se ainda $d\widehat{\alpha} = d\alpha - dd\widehat{\beta} = d\alpha = \omega$ e, uma vez que, para cada x no aberto $U_{2r} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 2r\}$, $\widehat{\beta}_x = \beta_x$, e portanto também $d\widehat{\beta}_x = d\beta_x = \alpha_x$, concluímos que, para cada $x \in U_{2r}$, $\widehat{\alpha}_x = 0$, o que mostra que $\widehat{\alpha} \in \Omega_c^{p-1}(\mathbb{R}^n)$. Ficou assim provado que se tem efectivamente $\omega \in B_c^p(\mathbb{R}^n)$, o que termina a demonstração. \square

O resultado anterior, caracterizando os espaços de cohomologia de de Rham com suporte compacto de \mathbb{R}^n , permite caracterizar também a das variedades difeomorfas a \mathbb{R}^n . Estas incluem, por exemplo, as bolas abertas de um espaço euclidiano (cf. o exercício IV.21 adiante) mas, para utilização futura, o exemplo seguinte vai ser especialmente importante.

IV.4.12. Sejam $n \geq 1$ e, para cada $1 \leq j \leq n$, $a_j < b_j$ em \mathbb{R} . Tem-se então que o aberto $M = \prod_{j=1}^n]a_j, b_j[$ é difeomorfo a \mathbb{R}^n e, em consequência, tem-se

$H_c^p(M) = \{0\}$, para cada $p \neq n$, e $H_c^n(M)$ é um espaço vectorial de dimensão 1, a aplicação linear $f: H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{K}$ sendo um isomorfismo.

Dem: Começamos por notar que, para cada j , existe um difeomorfismo $] -1, 1[\rightarrow]a_j, b_j[$ definido por

$$t \mapsto \frac{a_j + b_j}{2} + t \frac{b_j - a_j}{2},$$

cujo inverso está definido por

$$s \mapsto \frac{2s - (a_j + b_j)}{b_j - a_j}.$$

Em seguida, reparamos que existe um difeomorfismo $] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}},$$

cujo inverso está definido por

$$s \mapsto \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}.$$

Por composição, concluímos a existência, para cada j , de um difeomorfismo $\varphi_j:]a_j, b_j[\rightarrow \mathbb{R}$ e daqui se deduz a existência de um difeomorfismo φ , de $M = \prod]a_j, b_j[$ sobre \mathbb{R}^n , definido por

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto (\varphi_1(t_1), \dots, \varphi_n(t_n)).$$

A existência deste difeomorfismo implica, por IV.4.6 e pelo resultado precedente, que $H_c^p(M) = \{0\}$, se $p \neq n$, e que $H_c^n(M)$ é um espaço vectorial de dimensão 1 e o facto de f ser um isomorfismo vem de que, por IV.4.10, esta aplicação é uma aplicação linear sobrejectiva. \square

§5. Dualidade de Poincaré.

IV.5.1. Sejam E e F espaços vectoriais sobre o corpo \mathbb{K} e $\xi: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação bilinear. Vamos dizer que ξ *define o primeiro espaço como dual do segundo* se a aplicação linear $E \rightarrow L(F; \mathbb{K})$, que aplica $x \in E$ no elemento $y \mapsto \xi(x, y)$ de $L(F; \mathbb{K})$, for um isomorfismo. Vamos dizer que ξ *define o segundo espaço como dual do primeiro*, se a aplicação bilinear oposta, $\widehat{\xi}: F \times E \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $\widehat{\xi}(y, x) = \xi(x, y)$ definir o primeiro como dual do segundo, isto é, se a aplicação linear $F \rightarrow L(E; \mathbb{K})$, que aplica $y \in F$ no elemento $x \mapsto \widehat{\xi}(y, x)$, for um isomorfismo. Quando as duas condições anteriores forem verificadas, diremos simplesmente que ξ *define cada um dos espaços vectoriais como dual do outro*.

IV.5.2. Lembremos que, se E é um espaço vectorial de dimensão finita n , sobre o corpo \mathbb{K} , então o dual $L(E; \mathbb{K})$ tem também dimensão n e que, mais precisamente, se $(x_j)_{j \in J}$ é uma base de E , tem lugar uma base associada $(\alpha_j)_{j \in J}$ de $L(E; \mathbb{K})$, definida por

$$\alpha_j(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}.$$

Para além disso, podemos mesmo afirmar que, se E tem dimensão infinita, então $L(E; \mathbb{K})$ tem também dimensão infinita.

Dem: Basta repararmos que, se $(x_j)_{j \in J}$ é uma base de E , podemos definir as aplicações lineares $\alpha_j \in L(E; \mathbb{K})$, para cada $j \in J$, pela mesma condição que no caso da dimensão finita, e, embora estas não constituam uma base de $L(E; \mathbb{K})$, são, de qualquer modo, linearmente independentes, visto que, se for $\sum a_j \alpha_j = 0$, aplicando ambos os membros a x_k , concluímos que $a_k = 0$. \square

IV.5.3. Como consequência do anterior, vemos que, se E e F são espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e se $\xi: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ é uma aplicação bilinear definindo um dos espaços como dual do outro, então, ou E e F têm a mesma dimensão finita, ou ambos têm dimensão infinita.

IV.5.4. **(Exemplos) a)** Se E é um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , tem lugar uma aplicação bilinear $L(E; \mathbb{K}) \times E \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $(\lambda, x) \mapsto \lambda(x)$, a qual define o primeiro espaço como dual do segundo (trivialidade).

b) Se E é um espaço euclidiano, isto é, um espaço vectorial real, de dimensão finita, munido de um produto interno, então o produto interno é uma aplicação bilinear $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que define cada um destes espaços vectoriais como dual do outro (uma aplicação linear injectiva entre espaços vectoriais com a mesma dimensão finita é um isomorfismo).

c) Analogamente, se E é um espaço hermitiano, isto é, um espaço vectorial complexo, de dimensão finita, munido de um produto interno complexo, então, notando \overline{E} o espaço vectorial conjugado de E (cf. II.1.7), o produto interno é uma aplicação bilinear $E \times \overline{E} \rightarrow \mathbb{C}$ que define cada um destes espaços vectoriais como dual do outro.

IV.5.5. Sejam E e F espaços vectoriais de dimensão finita e $\xi: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação bilinear, definindo um dos espaços E e F como dual do outro. Tem-se então que ξ também define o outro espaço como dual deste.

Dem: Suponhamos que ξ define o primeiro espaço como dual do segundo. Suponhamos que $y \in F$, verifica $y \neq 0$. Escolhendo uma base de F tendo y como um dos vectores, podemos construir uma aplicação linear $\alpha \in L(F; \mathbb{K})$ tal que $\alpha(y) \neq 0$. Por definição, vai existir $x \in E$, cuja imagem pelo isomorfismo $E \rightarrow L(F; \mathbb{K})$ seja α , tendo-se assim, em particular, $\xi(x, y) = \alpha(y) \neq 0$. Resulta daqui que a imagem de y pela aplicação linear $F \rightarrow L(E; \mathbb{K})$, associada a ξ , não é 0. Ficou assim provado que a aplicação linear $F \rightarrow L(E; \mathbb{K})$, associada a ξ , é injectiva pelo que, uma vez que, tendo em conta IV.5.3, estes dois espaços têm a mesma dimensão finita, esta aplicação linear é um isomorfismo, ou seja, ξ define o segundo espaço como dual do primeiro. A recíproca é de demonstração análoga, ou reduz-se ao caso já visto, por consideração da aplicação bilinear oposta $\tilde{\xi}: F \times E \rightarrow \mathbb{K}$. \square

O resultado anterior não se estende, de modo nenhum, à dimensão infinita. De facto, podemos mesmo afirmar o seguinte:

IV.5.6. Sejam E e F espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e $\xi: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação bilinear, definindo cada um dos espaços como dual do outro. Tem-se então que E e F têm dimensão finita.

Dem: Tendo em conta IV.5.3, basta mostrarmos que F tem dimensão finita. Suponhamos que isso não acontecia e seja $(y_j)_{j \in J}$ uma base de F , com J conjunto infinito de índices. Consideremos, para cada $j \in J$, a aplicação linear $\beta_j \in L(F; \mathbb{K})$ definida por

$$\beta_j(y_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}.$$

Trata-se de elementos linearmente independentes de $L(F; \mathbb{K})$, visto que, se fosse $\sum b_j \beta_j = 0$, obtínhamos, aplicando ambos os membros a y_k , $b_k = 0$.

Seja, para cada j , $x_j \in E$ o elemento correspondente a β_j pelo inverso do isomorfismo $E \rightarrow L(F; \mathbb{K})$, associado a ξ , ou seja, o definido pela condição de se ter

$$\xi(x_j, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}.$$

Reparemos que, para cada $y \in F$, vai ser finito o conjunto dos $j \in J$ tais que $\xi(x_j, y) \neq 0$, visto que, escrevendo $y = \sum b_k y_k$, com a família dos b_k essencialmente finita, a fórmula anterior implica que $\xi(x_j, y) = b_j$. Uma vez que $(x_j)_{j \in J}$ é uma família linearmente independente de vectores de E , podemos prolongá-la numa base de E e construir, a partir daí, uma aplicação linear $\alpha \in L(E; \mathbb{K})$ tal que $\alpha(x_j) = 1$, para todo o j . Seja $y \in F$ o elemento correspondente a α pelo inverso do isomorfismo $F \rightarrow L(E; \mathbb{K})$ associado a ξ . Tem-se assim, para cada j , $\xi(x_j, y) = \alpha(x_j) = 1$, o que é um absurdo, tendo em conta a conclusão anterior de que devia ser finito o conjunto dos j com esta propriedade. \square

IV.5.7. Seja M uma variedade sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada. Para cada $0 \leq p \leq m$, tem então lugar uma aplicação bilinear

$$\xi^p: H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow \mathbb{K},$$

definida por

$$\xi^p([\omega], [\rho]) = \int_M \omega \wedge \rho,$$

a que daremos o nome de *aplicação de Poincaré*. Mais geralmente, definimos ainda as aplicações bilineares $\xi^p: H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow \mathbb{K}$, para $p < 0$ e para $p > m$ como sendo as únicas aplicações bilineares possíveis (ambos os factores do domínio são $\{0\}$).

Dem: O resultado ficará demonstrado se verificarmos a existência de aplicações bilineares $\eta^p: H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow H_c^m(M)$, definidas por $\eta^p([\omega], [\rho]) = [\omega \wedge \rho]$, visto que então as aplicações do enunciado não são mais do que as compostas destas com a aplicação linear $f: H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$, referida em IV.4.10. Em primeiro lugar, sendo $\omega \in Z^p(M)$ e $\rho \in Z_c^{m-p}(M)$, podemos considerar um compacto $K \subset M$ fora do qual ρ se anule e então $\omega \wedge \rho$ anula-se fora de K e verifica $d(\omega \wedge \rho) = d\omega \wedge \rho + (-1)^p \omega \wedge d\rho = 0$, o que mostra que $\omega \wedge \rho \in Z_c^m(M)$. Sendo agora $[\omega] = [\omega']$, em $H^p(M)$, e

$[\rho] = [\rho']$, em $H^{m-p}(M)$, tem-se $\omega' = \omega + d\alpha$ e $\rho' = \rho + d\beta$, com $\alpha \in \Omega^{p-1}(M)$ e $\beta \in \Omega_c^{m-p-1}(M)$, e então, sendo $K' \subset M$ um compacto fora do qual β , e portanto $d\beta$, se anule,

$$\begin{aligned}\omega' \wedge \rho' &= \omega \wedge \rho + d\alpha \wedge (\rho + d\beta) + \omega \wedge d\beta = \\ &= \omega \wedge \rho + d(\alpha \wedge (\rho + d\beta) + (-1)^p \omega \wedge \beta),\end{aligned}$$

com a forma diferencial $\alpha \wedge (\rho + d\beta) + (-1)^p \omega \wedge \beta$, de grau $m-1$, a anular-se fora do compacto $K \cup K' \subset M$, o que mostra que $[\omega \wedge \rho] = [\omega' \wedge \rho']$ em $H_c^m(M)$. Verificámos assim que estão bem definidas as aplicações $\eta^p: H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow H_c^m(M)$, sendo imediato verificar que elas são bilineares. \square

O teorema de dualidade de Poincaré, objectivo central desta secção, afirma-nos que, se M é uma variedade sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada, então, para cada p , $\xi^p: H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow \mathbb{K}$ define o primeiro espaço como dual do segundo. Uma vez que a demonstração deste teorema vai ser longa, utilizando vários resultados auxiliares, vamos apresentar uma definição auxiliar, a de variedade de Poincaré, que perderá toda a utilidade no fim da secção, na medida em que o teorema de Poincaré afirmará simplesmente que toda a variedade sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada, é uma variedade de Poincaré.

IV.5.8. Vamos chamar *variedade de Poincaré* de dimensão m a uma variedade M sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada, tal que, para cada p , a aplicação de Poincaré $\xi^p: H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow \mathbb{K}$ defina o primeiro espaço como dual do segundo. Repare-se, desde já, que esta exigência é trivial para $p < 0$ e $p > m$, na medida em que ambos os factores do domínio são então iguais a $\{0\}$.

IV.5.9. São variedades de Poincaré de dimensão m :

a) A variedade $M = \emptyset$;

b) Para cada $m \geq 0$, a variedade $M = \mathbb{R}^m$ e a variedade $M = \prod_{i=1}^m]a_i, b_i[$,

onde, para cada $1 \leq i \leq m$, $a_i < b_i$ são números reais, em ambos os casos com a orientação canónica.

Dem: A alínea a) é trivial, na medida em que se tem $H^p(M) = \{0\}$ e $H_c^{m-p}(M) = \{0\}$, para cada p . Provemos então b). Uma vez que M é convexa em \mathbb{R}^m e não vazia, e portanto suavemente contráctil, sabemos, por IV.1.13, que se tem $H^p(M) = \{0\}$ para cada $p \neq 0$ e que $H^0(M)$ é um espaço vectorial de dimensão 1. Por outro lado, por IV.4.11 e IV.4.12, sabemos que se tem $H_c^{m-p}(M) = \{0\}$, para $p \neq 0$, e que $H_c^m(M)$ é um espaço vectorial de dimensão 1, com $f: H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$ isomorfismo. A única verificação não trivial que temos que fazer é portanto a de que a aplicação de Poincaré $\xi^0: H^0(M) \times H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$ define o primeiro espaço como dual do

segundo e, uma vez que os dois factores do domínio têm dimensão 1, basta provarmos que a aplicação linear associada, de $H^0(M)$ para $L(H_c^m(M); \mathbb{K})$, não é identicamente nula. Ora, isso resulta de que, sendo $f \in Z^0(M)$ a aplicação de M para \mathbb{K} identicamente igual a 1 e $[\omega] \in H_c^m(M)$ um elemento não nulo, tem-se

$$\xi^0([f], [\omega]) = f([\omega]) \neq 0. \square$$

IV.5.10. Se trocarmos a orientação em todos os pontos de uma variedade de Poincaré de dimensão m , obtemos ainda uma variedade de Poincaré de dimensão m .

Dem: Basta atendermos a que as aplicações de Poincaré vêm multiplicadas por -1 e a que, multiplicando por -1 um isomorfismo, obtém-se ainda um isomorfismo. \square

IV.5.11. Sejam M e M' variedades sem bordo, de dimensão m , suavemente orientadas e $f: M \rightarrow M'$ um difeomorfismo que conserve (resp. inverta) as orientações. Se M é uma variedade de Poincaré de dimensão m , então o mesmo acontece a M' .

Dem: Tendo em conta o resultado precedente, podemos estudar apenas o caso em que f conserva as orientações. Considerando os isomorfismos associados $H^p(f): H^p(M') \rightarrow H^p(M)$ e $H_c^{m-p}(f): H_c^{m-p}(M') \rightarrow H_c^{m-p}(M)$, assim como o isomorfismo dual

$$H_c^{m-p}(f)^*: L(H_c^{m-p}(M); \mathbb{K}) \rightarrow L(H_c^{m-p}(M'); \mathbb{K}),$$

é então comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^p(M') \times H_c^{m-p}(M') & \xrightarrow{\xi^p} & \mathbb{K} \\ \downarrow H^p(f) \times H_c^{m-p}(f) & & \downarrow \text{Id} \\ H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) & \xrightarrow{\xi^p} & \mathbb{K} \end{array},$$

visto que, para cada $([\omega], [\rho]) \in H^p(M') \times H_c^{m-p}(M')$, tem-se

$$\begin{aligned} \xi^p(H^p(f) \times H_c^{m-p}(f)([\omega], [\rho])) &= \int_M (f^*\omega) \wedge (f^*\rho) = \int_M f^*(\omega \wedge \rho) = \\ &= \int_{M'} \omega \wedge \rho = \xi^p([\omega], [\rho]). \end{aligned}$$

Daqui se deduz que a aplicação linear $H^p(M') \rightarrow L(H_c^{m-p}(M'); \mathbb{K})$ associada a ξ^p é a composta dos isomorfismos

$$H^p(M') \xrightarrow{H^p(f)} H^p(M) \longrightarrow L(H_c^{m-p}(M); \mathbb{K}) \xrightarrow{H_c^{m-p}(f)^*} L(H_c^{m-p}(M'); \mathbb{K}),$$

o do meio por a variedade M ser de Poincaré, o que prova que aquela aplicação linear é um isomorfismo, e portanto que a variedade M' também é de Poincaré. \square

IV.5.12. Seja M uma variedade sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada e tal que exista uma família $(U_j)_{j \in J}$ de abertos de M , disjuntos dois a dois e de união M , tal que cada U_j , com a orientação correspondente, seja uma variedade de Poincaré de dimensão m . Tem-se então que M é uma variedade de Poincaré de dimensão m .

Dem: Sendo $\iota_j: U_j \rightarrow M$ as inclusões, sabemos, por IV.2.6, que $H^p(M)$ é um produto dos espaços vectoriais $H^p(U_j)$ definido pelas projecções $H^p(\iota_j): H^p(M) \rightarrow H^p(U_j)$. Por outro lado, tendo em conta IV.4.8, sabemos que $H_c^{m-p}(M)$ é uma soma dos espaços $H_c^{m-p}(U_j)$ com as injecções $\sigma_j: H_c^{m-p}(U_j) \rightarrow H_c^{m-p}(M)$ definidas por $\sigma_j([\omega]) = [\omega_{\setminus M}]$, onde $\omega_{\setminus M}$ é a extensão a M de $\omega \in \Omega_c^{m-p}(U_j)$, que se anula fora de U_j (cf. IV.4.7), pelo que, por IV.2.18, $L(H_c^{m-p}(M); \mathbb{K})$ é um produto dos $L(H_c^{m-p}(U_j); \mathbb{K})$ com as projecções

$$\sigma_j^*: L(H_c^{m-p}(M); \mathbb{K}) \rightarrow L(H_c^{m-p}(U_j); \mathbb{K}).$$

Sendo, para cada j , $\Phi_j: H^p(U_j) \rightarrow L(H_c^{m-p}(U_j); \mathbb{K})$ o isomorfismo associado à aplicação bilinear $\xi^p: H^p(U_j) \times H_c^{m-p}(U_j) \rightarrow \mathbb{K}$ e sendo, do mesmo modo $\Phi: H^p(M) \rightarrow L(H_c^{m-p}(M); \mathbb{K})$ a aplicação linear associada à aplicação bilinear $\xi^p: H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow \mathbb{K}$, o facto de se ter, para cada $[\omega] \in H^p(M)$ e $[\rho] \in H_c^{m-p}(U_j)$,

$$\xi^p(H^p(\iota_j)([\omega]), [\rho]) = \int_{U_j} \omega|_{U_j} \wedge \rho = \int_M \omega \wedge \rho_{\setminus M} = \xi^p([\omega], \sigma_j([\rho])),$$

igualdade que também pode ser escrita na forma

$$\Phi_j(H^p(\iota_j)([\omega]))([\rho]) = \Phi([\omega])(\sigma_j([\rho]) = \sigma_j^*(\Phi([\omega]))([\rho]),$$

implica que $\Phi_j \circ H^p(\iota_j) = \sigma_j^* \circ \Phi$.⁵⁸ Estamos agora em condições de provar que Φ é um isomorfismo, ou seja, que M é uma variedade de Poincaré, como queremos. Em primeiro lugar, se $[\omega] \in H^p(M)$ é tal que $\Phi([\omega]) = 0$, vem, para cada j , $\Phi_j(H^p(\iota_j)([\omega])) = \sigma_j^*(\Phi([\omega])) = 0$, donde $H^p(\iota_j)([\omega]) = 0$, pelo que o facto de os $H^p(\iota_j)$ definirem $H^p(M)$ como produto dos $H^p(U_j)$ implica que $[\omega] = 0$. Por outro lado, dado $\alpha \in L(H_c^{m-p}(M); \mathbb{K})$ arbitrário, para cada j a sobrejectividade de Φ_j implica a existência de $[\omega_j] \in H^p(U_j)$ tal que $\Phi_j([\omega_j]) = \sigma_j^*(\alpha)$ e, sendo $[\omega] \in H^p(M)$ o definido pela condição de se ter $H^p(\iota_j)([\omega]) = [\omega_j]$, vemos que, para cada j ,

$$\sigma_j^*(\Phi([\omega])) = \Phi_j(H^p(\iota_j)([\omega])) = \Phi_j([\omega_j]) = \sigma_j^*(\alpha),$$

⁵⁸Esta igualdade exprime que a aplicação linear Φ é o produto das aplicações lineares Φ_j , no sentido do exercício IV.9 adiante, pelo que, se tivéssemos levado mais longe o estudo geral da noção de produto, o resto da demonstração resumir-se-ia a aplicar um resultado geral que garante que um produto de isomorfismos é um isomorfismo.

o que, pelo facto de os σ_j^* definirem $L(H_c^{m-p}(M); \mathbb{K})$ como produto dos $L(H_c^{m-p}(U_j); \mathbb{K})$, implica que $\Phi([\omega]) = \alpha$. \square

IV.5.13. (**Corolário**) Se M é uma variedade orientada de dimensão 0, então M é uma variedade de Poincaré.

Dem: Basta atender a que M é a união disjunta dos seus subconjuntos unitários, que são abertos e difeomorfos a \mathbb{R}^0 . \square

O nosso próximo passo vai ser a prova que, se a variedade M é união de dois abertos U e V que sejam variedades de Poincaré e tais que $U \cap V$ também seja uma variedade de Poincaré, então M é uma variedade de Poincaré. Para chegar aí, vamos precisar de um lema algébrico, o lema dos cinco, de utilização muito frequente em Topologia Algébrica, e de uma versão da sucessão exacta de Mayer-Vietoris, para a cohomologia de de Rham com suporte compacto, que teremos ocasião de voltar a aplicar na próxima secção.

IV.5.14. (**Lema dos cinco**) Consideremos o seguinte diagrama comutativo de espaços vectoriais e aplicações lineares:

$$\begin{array}{ccccccccc} E_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & E_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & E_3 & \xrightarrow{\lambda_3} & E_4 & \xrightarrow{\lambda_4} & E_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ F_1 & \xrightarrow{\mu_1} & F_2 & \xrightarrow{\mu_2} & F_3 & \xrightarrow{\mu_3} & F_4 & \xrightarrow{\mu_4} & F_5 \end{array}$$

Suponhamos que as duas linhas são sucessões exactas e que as aplicações lineares $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ e φ_5 são isomorfismos. Tem-se então que φ_3 é também um isomorfismo.⁵⁹

Dem: Vamos começar por provar que a aplicação linear φ_3 é injectiva. Seja então $x_3 \in E_3$ tal que $\varphi_3(x_3) = 0$. Tem-se então

$$\varphi_4(\lambda_3(x_3)) = \mu_3(\varphi_3(x_3)) = 0,$$

pelo que, por φ_4 ser uma aplicação linear injectiva, $\lambda_3(x_3) = 0$; o facto de a primeira linha ser exacta em E_3 garante a existência de $x_2 \in E_2$ tal que $\lambda_2(x_2) = x_3$ e tem-se então

$$\mu_2(\varphi_2(x_2)) = \varphi_3(\lambda_2(x_2)) = \varphi_3(x_3) = 0,$$

pelo que o facto de a segunda linha ser exacta em F_2 garante a existência de $y_1 \in F_1$ tal que $\mu_1(y_1) = \varphi_2(x_2)$; uma vez que a aplicação linear φ_1 é sobre-

⁵⁹Este resultado tem uma característica pouco comum em Matemática: As hipóteses que fazemos podiam claramente ser enfraquecidas sem ter que mudar nada à demonstração (por exemplo, bastaria pedir que a aplicação linear φ_1 fosse sobrejectiva e a aplicação linear φ_5 fosse injectiva. A razão por que se procede deste modo é que o enunciado apresentado é mais simples de ser fixado e as hipóteses feitas são as que se verificam nas aplicações típicas deste lema em Topologia Algébrica.

jectiva, existe $x_1 \in E_1$ tal que $\varphi_1(x_1) = y_1$ e vemos que

$$\varphi_2(\lambda_1(x_1)) = \mu_1(\varphi_1(x_1)) = \mu_1(y_1) = \varphi_2(x_2),$$

donde, por φ_2 ser injectiva, $\lambda_1(x_1) = x_2$, e portanto

$$x_3 = \lambda_2(x_2) = \lambda_2(\lambda_1(x_1)) = 0,$$

o que prova a injectividade de φ_3 . Vamos provar agora que a aplicação linear φ_3 é sobrejectiva. Seja então $y_3 \in F_3$ arbitrário. O facto de a aplicação linear φ_4 ser sobrejectiva garante a existência de $x_4 \in E_4$ tal que $\varphi_4(x_4) = \mu_3(y_3)$. Vem então

$$\varphi_5(\lambda_4(x_4)) = \mu_4(\varphi_4(x_4)) = \mu_4(\mu_3(y_3)) = 0,$$

donde, por φ_5 ser injectiva, $\lambda_4(x_4) = 0$ e a exactidão da primeira linha em E_4 implica a existência de $x_3 \in E_3$ tal que $\lambda_3(x_3) = x_4$; vemos agora que

$$\mu_3(y_3 - \varphi_3(x_3)) = \mu_3(y_3) - \varphi_4(\lambda_3(x_3)) = \mu_3(y_3) - \varphi_4(x_4) = 0,$$

pelo que o facto de a primeira linha ser exacta em F_3 implica a existência de $y_2 \in F_2$ tal que $y_3 - \varphi_3(x_3) = \mu_2(y_2)$; o facto de a aplicação linear φ_2 ser sobrejectiva permite fixar $x_2 \in E_2$ tal que $\varphi_2(x_2) = y_2$ e obtemos agora

$$\varphi_3(x_3 + \lambda_2(x_2)) = \varphi_3(x_3) + \mu_2(\varphi_2(x_2)) = \varphi_3(x_3) + \mu_2(y_2) = y_3,$$

o que termina a prova da sobrejectividade de φ_3 . \square

IV.5.15. Sejam $M \subset E$ uma variedade e U e V abertos de M tais que $U \cup V = M$. Notemos $\Omega_c^\bullet(U) \times \Omega_c^\bullet(V)$ o complexo de cocadeias produto de $\Omega_c^\bullet(U)$ e $\Omega_c^\bullet(V)$ construído a partir dos produtos cartesianos $\Omega_c^p(U) \times \Omega_c^p(V)$. Tem então lugar uma sucessão exacta curta de complexos de cocadeias

$$0 \longrightarrow \Omega_c^\bullet(U \cap V) \xrightarrow{\mu^\bullet} \Omega_c^\bullet(U) \times \Omega_c^\bullet(V) \xrightarrow{\lambda^\bullet} \Omega_c^\bullet(M) \longrightarrow 0,$$

em que as aplicações lineares

$$\begin{aligned} \mu^p: \Omega_c^p(U \cap V) &\rightarrow \Omega_c^p(U) \times \Omega_c^p(V) \\ \lambda^p: \Omega_c^p(U) \times \Omega_c^p(V) &\rightarrow \Omega_c^p(M) \end{aligned}$$

estão definidas por $\mu^p(\rho) = (-\rho_U, \rho_V)$ e $\lambda^p(\alpha, \beta) = \alpha_M + \beta_M$ (notações de IV.4.7).

Dem: Do facto de, para cada $(\alpha, \beta) \in \Omega_c^p(U) \times \Omega_c^p(V)$, se ter $d(\alpha, \beta) = (d\alpha, d\beta)$ deduz-se imediatamente que μ^\bullet e λ^\bullet são efectivamente morfismos de complexos de cocadeias. O facto de cada aplicação linear μ^p ser injectiva resulta de que já o é, por exemplo, a aplicação $\Omega_c^p(U \cap V) \rightarrow \Omega_c^p(V)$, definida por $\mu^p(\rho) = \rho_V$. O facto de se ter $(\rho_U)_M = \rho_M$ e $(\rho_V)_M = \rho_M$ implica que $\lambda^p \circ \mu^p = 0$, e portanto que a imagem de μ^p está contida no núcleo de λ^p . Suponhamos, reciprocamente, que

$(\alpha, \beta) \in \Omega_c^p(U) \times \Omega_c^p(V)$ pertence ao núcleo de λ^p , ou seja, que $\alpha_{\setminus M} + \beta_{\setminus M} = 0$, e sejam $K \subset U$ e $K' \subset V$ compactos tais que α se anule em $U \setminus K$ e β se anule em $V \setminus K'$; da igualdade $\alpha_{\setminus M} + \beta_{\setminus M} = 0$ deduzimos que se tem mesmo $\alpha_x = 0$, para cada $x \in U \setminus (K \cap K')$ e $\beta_x = 0$, para cada $x \in V \setminus (K \cap K')$, e que $\beta_x = -\alpha_x$, para cada $x \in U \cap V$, o que nos permite definir $\rho \in \Omega_c^p(U \cap V)$ por $\rho_x = -\alpha_x = \beta_x$ (ρ anula-se fora do compacto $K \cap K' \subset U \cap V$), para o qual se tem $(\alpha, \beta) = \mu^p(\rho)$. Resta-nos provar que $\lambda^p: \Omega_c^p(U) \times \Omega_c^p(V) \rightarrow \Omega_c^p(M)$ é uma aplicação linear sobrejectiva. Pelo teorema da partição da unidade, podemos considerar aplicações suaves $\varphi, \psi: M \rightarrow [0, 1]$, a primeira nula fora do subconjunto $A \subset U$, fechado em M , e a segunda nula fora do subconjunto $B \subset V$, fechado em M , e tais que, para cada $x \in M$, $\varphi(x) + \psi(x) = 1$. Dado $\rho \in \Omega_c^p(M)$, e sendo $K \subset M$ um compacto fora do qual ρ se anule, podemos tomar $\alpha \in \Omega_c^p(U)$ e $\beta \in \Omega_c^p(V)$, definidos por $\alpha_x = \varphi(x) \rho_x$ e $\beta_x = \psi(x) \rho_x$ (α anula-se fora do compacto $K \cap A \subset U$ e β anula-se fora do compacto $K \cap B \subset V$), sendo imediato que as extensões $\alpha_{\setminus M}$ e $\beta_{\setminus M}$ estão definidas ainda por $x \mapsto \varphi(x) \rho_x$ e $x \mapsto \psi(x) \rho_x$, respectivamente, de onde se deduz que $\lambda^p(\alpha, \beta) = \rho$. \square

IV.5.16. Nas hipóteses de IV.5.15, à sucessão exacta curta de complexos de cocadeias aí referida fica associada a correspondente sucessão exacta de cohomologia, indefinidamente prolongável nos dois sentidos, de que destacamos a seguinte “secção representativa”

$$H_c^{p-1}(M) \xrightarrow{\partial^{p-1}} H_c^p(U \cap V) \xrightarrow{H^p(\mu^*)} H^p(\Omega_c^*(U) \times \Omega_c^*(V)) \xrightarrow{H^p(\lambda^*)} H_c^p(M) \xrightarrow{\partial^p} H_c^{p+1}(U \cap V),$$

a que se dá o nome de *sucessão exacta de Mayer-Vietoris com suporte compacto* associada aos abertos U e V de M (repare-se que utilizámos a “secção representativa” da sucessão exacta de cohomologia referida na nota IV.3.3⁶⁰). Lembremos, a propósito, que, de acordo com IV.2.5, o espaço de cohomologia $H^p(\Omega_c^*(U) \times \Omega_c^*(V))$ é um produto de $H_c^p(U)$ e $H_c^p(V)$, com as projecções naturalmente definidas, e portanto é isomorfo ao produto cartesiano $H_c^p(U) \times H_c^p(V)$, pelo isomorfismo que associa $([\alpha], [\beta])$ a $[(\alpha, \beta)]$.

IV.5.17. **(Lema)** Sejam $\xi_1: E_1 \times F_1 \rightarrow \mathbb{K}$ e $\xi_2: E_2 \times F_2 \rightarrow \mathbb{K}$ duas aplicações lineares, cada uma das quais definindo o primeiro espaço como dual do segundo. Seja E um produto de E_1 e E_2 , com as projecções $\pi_j: E \rightarrow E_j$, e F um produto de F_1 e F_2 , com as projecções $\hat{\pi}_j: F \rightarrow F_j$. Tem então lugar uma aplicação bilinear $\xi: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$, definida por

$$\xi(x, y) = \xi_1(\pi_1(x), \hat{\pi}_1(y)) + \xi_2(\pi_2(x), \hat{\pi}_2(y)),$$

a qual define também o primeiro espaço como dual do segundo.

Dem: Sejam $\Phi_j: E_j \rightarrow L(F_j; \mathbb{K})$ as aplicações lineares associadas às aplica-

⁶⁰Por razões exclusivamente tipográficas...

ções bilineares ξ_j , que, por hipótese, são isomorfismos e seja $\Phi: E \rightarrow L(F; \mathbb{K})$ a aplicação linear associada à aplicação bilinear ξ , que temos de demonstrar ser também um isomorfismo. Sejam $\widehat{\iota}_j: F_j \rightarrow F$ as injecções associadas à apresentação de F como produto dos F_j . Sendo $x \in E$ tal que $\Phi(x) = 0$, tem-se, para cada $j = 1, 2$ e cada $y_j \in F_j$,

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(x)(\widehat{\iota}_j(y_j)) = \xi(x, \widehat{\iota}_j(y_j)) = \\ &= \xi_1(\pi_1(x), \widehat{\pi}_1(\widehat{\iota}_j(y_j))) + \xi_2(\pi_2(x), \widehat{\pi}_2(\widehat{\iota}_j(y_j))) = \\ &= \xi_j(\pi_j(x), y_j) = \Phi_j(\pi_j(x))(y_j), \end{aligned}$$

donde $\Phi_j(\pi_j(x)) = 0$ e $\pi_j(x) = 0$, pelo que, por termos um produto, $x = 0$. Para provarmos a sobrejectividade de Φ , consideremos $\beta \in L(F; \mathbb{K})$ arbitrário. Para cada $j = 1, 2$, podemos considerar o elemento $\beta \circ \widehat{\iota}_j \in L(F_j; \mathbb{K})$, e portanto também $x_j \in E$ tal que $\Phi_j(x_j) = \beta \circ \widehat{\iota}_j$. Seja $x \in E$ tal que $\pi_j(x) = x_j$. Para cada $y \in F$, vem então

$$\begin{aligned} \Phi(x)(y) &= \xi(x, y) = \xi_1(x_1, \widehat{\pi}_1(y)) + \xi_2(x_2, \widehat{\pi}_2(y)) = \\ &= \beta \circ \widehat{\iota}_1(\widehat{\pi}_1(y)) + \beta \circ \widehat{\iota}_2(\widehat{\pi}_2(y)) = \beta(y), \end{aligned}$$

o que mostra que $\Phi(x) = \beta$. \square

IV.5.18. Sejam E, F e G espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e $\lambda: E \rightarrow F$ e $\mu: F \rightarrow G$ aplicações lineares tais que venha exacta a sucessão $E \xrightarrow{\lambda} F \xrightarrow{\mu} G$. Sendo $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$, é então também exacta a sucessão

$$L(G; \mathbb{K}') \xrightarrow{\mu^*} L(F; \mathbb{K}') \xrightarrow{\lambda^*} L(E; \mathbb{K}').^{61}$$

Dem: O facto de se ter $\mu \circ \lambda = 0$ implica trivialmente que $\lambda^* \circ \mu^* = 0$, e portanto que a imagem de μ^* está contida no núcleo de λ^* . Suponhamos, reciprocamente, que $\alpha \in L(F; \mathbb{K}')$ pertence ao núcleo de λ^* , ou seja que $\alpha \circ \lambda = 0$. Pode-se então definir uma aplicação linear $\widehat{\beta}: \mu(F) \rightarrow \mathbb{K}'$ por $\widehat{\beta}(\mu(y)) = \alpha(y)$, visto que, se $\mu(y) = \mu(y')$, vinha $y - y' \in \ker(\mu) = \lambda(E)$, ou seja, $y - y' = \lambda(x)$, e então $\alpha(y) - \alpha(y') = \alpha(\lambda(x)) = 0$. Seja $\pi: G \rightarrow \mu(F)$ uma aplicação linear tal que $\pi(z) = z$, para cada $z \in \mu(F)$ (por exemplo, a projecção ortogonal sobre $\mu(F)$, associada a um produto interno que se escolha em G , ou, alternativamente, uma aplicação linear escolhida a partir da escolha de uma base de $\mu(F)$ que se prolonga numa

⁶¹A *Álgebra Homológica* é a parte da matemática que estuda, do ponto de vista geral os complexos de cocadeias e os espaços de cohomologia associados, assim como outras questões relacionadas. Nela se inserem naturalmente o estudo das sucessões exactas e resultados como o lema da serpente ou o lema dos cinco. Em aplicações mais profundas da *Álgebra Homológica* à *Topologia Algébrica*, revela-se necessário trabalhar, mais geralmente, com módulos sobre um anel, em vez dos espaços vectoriais. Nesse quadro, o resultado que acabamos de enunciar é, em geral, falso.

base de G)⁶². Podemos então considerar $\beta \in L(G; \mathbb{K}')$, definida por $\beta = \widehat{\beta} \circ \pi$, tendo-se, para cada $y \in F$,

$$\beta(\mu(y)) = \widehat{\beta}(\pi(\mu(y))) = \widehat{\beta}(\mu(y)) = \alpha(y),$$

portanto $\alpha = \mu^*(\beta)$. \square

IV.5.19. Sejam M uma variedade sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada e U e V abertos de M tais que $U \cup V = M$. Suponhamos que U , V e $U \cap V$, com as orientações correspondentes, são variedades de Poincaré. Tem-se então que M é uma variedade de Poincaré.

Dem: Consideremos as secções das sucessões exactas de Mayer-Vietoris, ordinária e de suporte compacto, associadas à cobertura de M pelos abertos U e V , representadas no diagrama 1 da página seguinte, a segunda das quais está escrita da direita para a esquerda (cf. IV.3.5 e IV.5.16).

⁶²É aqui que aparece o problema, referido na nota anterior, se estivéssemos a trabalhar no quadro dos módulos sobre um anel.

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^{p-1}(\Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V)) & \xrightarrow{H^{p-1}(\mu^\bullet)} & H^{p-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\partial^{p-1}} & H^p(M) & \xrightarrow{H^p(\lambda^\bullet)} & H^p(\Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V)) & \xrightarrow{H^p(\mu^\bullet)} & H^p(U \cap V) \\
H^{m-p+1}(\Omega_c^\bullet(U) \times \Omega_c^\bullet(V)) & \xleftarrow{H^{m-p+1}(\mu^\bullet)} & H_c^{m-p+1}(U \cap V) & \xleftarrow{\partial^{m-p}} & H_c^{m-p}(M) & \xleftarrow{H^{m-p}(\lambda^\bullet)} & H^{m-p}(\Omega_c^\bullet(U) \times \Omega_c^\bullet(V)) & \xleftarrow{H^{m-p}(\mu^\bullet)} & H_c^{m-p}(U \cap V)
\end{array}$$

Diagrama 1

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^{p-1}(\Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V)) & \xrightarrow{H^{p-1}(\mu^\bullet)} & H^{p-1}(U \cap V) & \xrightarrow{(-1)^p \partial^{p-1}} & H^p(M) & \xrightarrow{H^p(\lambda^\bullet)} & H^p(\Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V)) & \xrightarrow{H^p(\mu^\bullet)} & H^p(U \cap V) \\
\downarrow \widehat{\Phi}^{p-1} & & \downarrow \Phi^{p-1} & & \downarrow \Phi^p & & \downarrow \widehat{\Phi}^p & & \downarrow \Phi^p \\
L(H^{m-p+1}(\Omega_c^\bullet(U) \times \Omega_c^\bullet(V)); \mathbb{K}) & \longrightarrow & L(H_c^{m-p+1}(U \cap V); \mathbb{K}) & \longrightarrow & L(H_c^{m-p}(M); \mathbb{K}) & \longrightarrow & L(H^{m-p}(\Omega_c^\bullet(U) \times \Omega_c^\bullet(V)); \mathbb{K}) & \longrightarrow & L(H_c^{m-p}(U \cap V); \mathbb{K})
\end{array}$$

Diagrama 2

Para cada par de espaços vectoriais na mesma coluna, temos uma aplicação bilinear, do respectivo produto cartesiano para \mathbb{K} , nomeadamente a aplicação de Poincaré, que notaremos ξ , no caso da segunda, terceira e quinta colunas, e a aplicação, que notaremos $\widehat{\xi}$, construída a partir das aplicações de Poincaré de U e de V , no caso da primeira e da quarta (cf. IV.5.17). Reparemos agora que as referidas aplicações bilineares verificam as seguintes condições:

a) Para cada $[(\omega, \tau)] \in H^p(\Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V))$ e $[\rho] \in H_c^{m-p}(U \cap V)$,

$$\xi^p(H^p(\mu^\bullet)([(\omega, \tau)]), [\rho]) = \widehat{\xi}^p([\omega, \tau], H^{m-p}(\mu^\bullet)([\rho]))$$

(e analogamente com $p - 1$ no lugar de p). Com efeito, podemos escrever

$$\begin{aligned} \xi^p([\tau_{/U \cap V} - \omega_{/U \cap V}], [\rho]) &= \int_{U \cap V} (\tau_{/U \cap V} - \omega_{/U \cap V}) \wedge \rho = \\ &= \int_{U \cap V} \tau_{/U \cap V} \wedge \rho - \int_{U \cap V} \omega_{/U \cap V} \wedge \rho = \\ &= \int_V \tau \wedge \rho_{\setminus V} - \int_U \omega \wedge \rho_{\setminus U} = \\ &= \widehat{\xi}_p([\omega, \tau], [(-\rho_{\setminus U}, \rho_{\setminus V})]). \end{aligned}$$

b) Para cada $[\omega] \in H^p(M)$ e $[(\rho, \sigma)] \in H^{m-p}(\Omega_c^\bullet(U) \times \Omega_c^\bullet(V))$,

$$\widehat{\xi}^p(H^p(\lambda^\bullet)([\omega]), [(\rho, \sigma)]) = \xi^p([\omega], H^{m-p}(\mu^\bullet)([(\rho, \sigma)])).$$

Com efeito, podemos escrever

$$\begin{aligned} \xi^p([\omega_{/U}], [\rho]) + \xi^p([\omega_{/V}], [\sigma]) &= \int_U \omega_{/U} \wedge \rho + \int_V \omega_{/V} \wedge \sigma = \\ &= \int_M \omega \wedge \rho_{\setminus M} + \int_M \omega \wedge \sigma_{\setminus M} = \\ &= \int_M \omega \wedge (\rho_{\setminus M} + \sigma_{\setminus M}) = \\ &= \xi^p([\omega], [(\rho_{\setminus M} + \sigma_{\setminus M})]). \end{aligned}$$

c) Para cada $[\omega] \in H^{p-1}(U \cap V)$ e $[\rho] \in H_c^{m-p}(M)$, tem-se

$$\xi^p(\partial^{p-1}([\omega]), [\rho]) = (-1)^p \xi^{p-1}([\omega], \partial^{m-p}([\rho])).$$

Para o verificarmos, começamos por relembrar a definição explícita das aplicações lineares de conexão ∂^{p-1} e ∂^{m-p} (adaptar a definição geral em IV.3.2 às duas sucessões exactas de complexos de cocadeias em questão): Sabemos que existem formas diferenciais $\omega_1 \in \Omega^{p-1}(U)$ e $\omega_2 \in \Omega^{p-1}(V)$ tais que $\omega = \omega_{2/U \cap V} - \omega_{1/U \cap V}$ e então $\partial^{p-1}([\omega]) = [\tau]$, onde $\tau \in \Omega^p(M)$ verifica $\tau_{/U} = d\omega_1$ e $\tau_{/V} = d\omega_2$; Sabemos que existem formas diferenciais $\rho_1 \in \Omega_c^{m-p}(U)$ e $\rho_2 \in \Omega_c^{m-p}(V)$ tais que $\rho = \rho_{1 \setminus M} + \rho_{2 \setminus M}$ e então tem-se $\partial^{m-p}([\rho]) = [\sigma]$, onde a aplicação $\sigma \in \Omega_c^{m-p+1}(U \cap V)$ verifica $\sigma_{\setminus U} = -d\rho_1$ e $\xi_{\setminus V} = d\rho_2$. Aplicando o teorema de Stokes às formas

diferenciais de suporte compacto $\omega_1 \wedge \rho_1 \in \Omega_c^{m-1}(U)$ e $\omega_2 \wedge \rho_2 \in \Omega_c^{m-1}(V)$, verificamos que

$$0 = \int_U d(\omega_1 \wedge \rho_1) = \int_U (d\omega_1 \wedge \rho_1 + (-1)^{p-1} \omega_1 \wedge d\rho_1),$$

e analogamente para a outra forma diferencial, donde

$$\int_U d\omega_1 \wedge \rho_1 = (-1)^p \int_U \omega_1 \wedge d\rho_1, \quad \int_V d\omega_2 \wedge \rho_2 = (-1)^p \int_V \omega_2 \wedge d\rho_2.$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \xi^p(\partial^{p-1}([\omega]), [\rho]) &= \int_M \tau \wedge \rho = \int_M \tau \wedge \rho_{1 \setminus M} + \int_M \tau \wedge \rho_{2 \setminus M} = \\ &= \int_U \tau_{/U} \wedge \rho_1 + \int_V \tau_{/V} \wedge \rho_2 = \\ &= \int_U d\omega_1 \wedge \rho_1 + \int_V d\omega_2 \wedge \rho_2 = \\ &= (-1)^p \left(\int_U \omega_1 \wedge d\rho_1 + \int_V \omega_2 \wedge d\rho_2 \right) = \\ &= (-1)^p \left(\int_U -\omega_1 \wedge \sigma_{\setminus U} + \int_V \omega_2 \wedge \sigma_{\setminus V} \right) = \\ &= (-1)^p \int_{U \cap V} (-\omega_{1/U \cap V} \wedge \sigma + \omega_{2/U \cap V} \wedge \sigma) = \\ &= (-1)^p \int_{U \cap V} \omega \wedge \sigma = \xi^{p-1}([\omega], \partial^{m-p}([\rho])), \end{aligned}$$

o que termina a verificação de c).

Podemos agora considerar o diagrama 2, na página 244, em que as aplicações lineares da segunda linha são as duais das aplicações lineares na segunda linha do diagrama 1, na mesma página, e as aplicações lineares verticais são as associadas às aplicações bilineares atrás referidas. A segunda linha do diagrama 2 é exacta, tendo em conta IV.5.18, e a primeira linha também o é, uma vez que o facto de multiplicar uma aplicação linear por -1 não altera o seu kernel nem a sua imagem. O que verificámos nas alíneas a), b) e c) implica trivialmente a comutatividade do diagrama 2. Tendo em conta IV.5.17 e o facto de U , V e $U \cap V$ serem variedades de Poincaré, concluímos que as primeira, segunda, quarta e quinta aplicações lineares verticais do diagrama 2 são isomorfismos. O lema dos cinco (IV.5.14) permite-nos portanto concluir que a terceira aplicação linear vertical também é um isomorfismo, o que mostra que M é uma variedade de Poincaré. \square

Antes de passarmos, finalmente, à demonstração de que toda a variedade sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada é uma variedade de Poincaré, precisamos ainda de um resultado, de natureza topológica, sobre

as variedades que, apesar de parecer eventualmente um pouco artificial, pode ser aplicado na demonstração de vários teoremas profundos no quadro destas.

IV.5.20. Lembremos que uma *base de abertos* de um espaço topológico X é um conjunto \mathcal{U} de abertos de X tal que todo o aberto U de X se possa escrever como união de uma família de abertos pertencentes a \mathcal{U} ou, equivalentemente, tal que, para cada aberto U de X e cada $x \in U$, exista um aberto $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V \subset U$. Vamos dizer que uma base de abertos \mathcal{U} é uma *i-base de abertos* se, sempre que $U, V \in \mathcal{U}$, também $U \cap V \in \mathcal{U}$.

Se \mathcal{U} é uma base de abertos do espaço topológico X (resp. uma i-base de abertos) e se $Y \subset X$ é um subespaço topológico, então o conjunto \mathcal{U}_Y das intersecções $Y \cap U$, com $U \in \mathcal{U}$, é uma base de abertos (resp. uma i-base de abertos) de Y .

IV.5.21. O espaço cartesiano \mathbb{R}^n admite uma i-base de abertos *contável*⁶³, nomeadamente a constituída pelo conjunto vazio e pelos conjuntos da forma

$$\prod_{j=1}^n]a_j, b_j[$$

onde, para cada $1 \leq j \leq n$, $a_j < b_j$ são números racionais.⁶⁴ Por homeomorfismo, todo o espaço vectorial E , de dimensão finita, vai admitir uma i-base de abertos contável e portanto o mesmo acontece a todo o subespaço topológico $X \subset E$, em particular a toda a variedade.

IV.5.22. (**Lema**) Seja X um espaço topológico localmente compacto e separado, admitindo uma base de abertos contável (é o que acontece, em particular, se $X \subset E$ é uma variedade, eventualmente com bordo). Existe então uma sucessão de compactos de X , $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $X = \bigcup_n K_n$ e $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$,

para cada n .

Dem: Seja \mathcal{U} uma base contável de abertos de X e seja \mathcal{V} a parte de \mathcal{U} constituída pelos $V \in \mathcal{U}$ tais que $\text{ad}(V)$ seja compacto. O conjunto \mathcal{V} é ainda uma base contável de abertos de X , visto que, se U é um aberto de X e se $x \in U$, então existe uma vizinhança compacta A de x , com $A \subset U$ e o facto de $\text{int}(A)$ ser um aberto de X , contendo x , implica a existência de $V \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V \subset \text{int}(A)$, em particular $x \in V \subset U$, tendo-se então, por A ser fechado, $\text{ad}(V) \subset A$ e portanto $\text{ad}(V)$ compacto, ou seja, $V \in \mathcal{V}$.

Afastando já o caso trivial em que $X = \emptyset$, parametrizemos os conjuntos de \mathcal{V} como os termos de uma sucessão $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Definimos agora recursivamente um compacto K_n , para cada $n \geq 1$, de modo que $V_n \subset K_n$ e que

⁶³A palavra *contável* significa “finito ou numerável”.

⁶⁴Reparar que a intersecção de dois intervalos $]a, b[$ e $]c, d[$ de \mathbb{R} , se não vazia, é igual ao intervalo $]\max(a, c), \min(b, d)[$.

$K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$, do seguinte modo: Pomos $K_1 = \text{ad}(V_1)$; supondo construídos os K_p , com $p \leq n$, verificando as condições referidas, atendemos a que o compacto K_n está contido na união de todos os V_j , que é igual a X , pelo que podemos considerar $N \geq n + 1$ tal que K_n esteja contido na união dos V_j , com $j \leq N$, e definimos o compacto K_{n+1} como sendo a união finita dos compactos $\text{ad}(V_j)$, com $j \leq N$; o facto de se ter $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ vem de K_n estar contido na união dos abertos V_j , com $j \leq N$, que está contida em K_{n+1} . O facto de se ter $V_n \subset K_n$ implica que a união dos K_n contém a união dos V_n , que é igual a X . \square

IV.5.23. Sejam X um espaço topológico e \mathcal{U} uma base de abertos de X .

a) Vamos notar \mathcal{U}_f a base de abertos de X , que contém \mathcal{U} , formada por todas as uniões finitas de conjuntos pertencentes a \mathcal{U} . Repare-se que, se \mathcal{U} é um i-base de abertos, o mesmo acontece a \mathcal{U}_f , visto que se tem

$$\left(\bigcup_i U_i \right) \cap \left(\bigcup_j V_j \right) = \bigcup_{i,j} (U_i \cap V_j).$$

b) Vamos notar \mathcal{U}_s a base de abertos de X , que contém \mathcal{U} , formada por todas as uniões contáveis de conjuntos pertencentes a \mathcal{U} , disjuntos dois a dois. Como anteriormente, se \mathcal{U} é uma i-base de abertos, o mesmo acontece a \mathcal{U}_s .

IV.5.24. (**Greub, Halperin e Vanstone, [7]**) Seja X um espaço topológico localmente compacto, separado e admitindo uma base de abertos contável (é o que acontece, em particular, se $X \subset E$ é uma variedade, eventualmente com bordo). Seja \mathcal{U} uma base arbitrária de abertos de X . Tem-se então que $((\mathcal{U}_f)_s)_f$ é o conjunto de todos os abertos de X .

Dem: Basta mostrarmos que $X \in ((\mathcal{U}_f)_s)_f$, visto que então, dado um aberto arbitrário U de X , U é ainda um espaço topológico localmente compacto, separado e com uma base de abertos contável, que admite uma base de abertos \mathcal{U}' , constituída pelos elementos de \mathcal{U} que estão contidos em U , tendo-se trivialmente $((\mathcal{U}_f)_s)_f \subset ((\mathcal{U}_f)_s)_f$.

Tendo em conta IV.5.22, podemos considerar uma sucessão $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compactos de X , com união X , verificando a condição $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$, para cada n , e ponhamos, por comodidade, $K_{-1} = K_0 = \emptyset$, o que é compatível com a condição referida.

Para cada $n \geq 1$, consideremos um aberto $U_n \in \mathcal{U}_f$, verificando

$$K_n \setminus \text{int}(K_{n-1}) \subset U_n \subset \text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2}.$$

Para provarmos a existência de $U_n \in \mathcal{U}_f$ nessas condições, atendemos a que $K_n \setminus \text{int}(K_{n-1})$ é um compacto contido no aberto $\text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2}$, escolhamos, para cada x nesse compacto, um aberto $V_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V_x \subset \text{int}(K_{n+1}) \setminus K_{n-2}$ e tomamos para U_n uma união finita de tais abertos V_x , que ainda contenha o compacto.

Reparemos que a união dos abertos U_n é X , visto que, para cada $x \in X$, podemos considerar o menor dos naturais n tais que $x \in K_n$, tendo-se então

$x \notin K_{n-1}$, portanto $x \in K_n \setminus \text{int}(K_{n-1}) \subset U_n$.

Reparemos agora que, se $n \geq m + 3$, tem-se $U_n \cap U_m = \emptyset$, visto que se tem $U_n \cap K_{n-2} = \emptyset$ e $U_m \subset K_{m+1} \subset K_{n-2}$. Podemos assim considerar abertos A_1, A_2 e A_3 , pertencentes a $(\mathcal{U}_f)_s$, definidos por

$$\begin{aligned} A_1 &= \bigcup_{n \geq 1} U_{3n-2} = U_1 \cup U_4 \cup U_7 \cup \dots \\ A_2 &= \bigcup_{n \geq 1} U_{3n-1} = U_2 \cup U_5 \cup U_8 \cup \dots \\ A_3 &= \bigcup_{n \geq 1} U_{3n} = U_3 \cup U_6 \cup U_9 \cup \dots, \end{aligned}$$

e tem-se $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, o que mostra que $X \in ((\mathcal{U}_f)_s)_f$. \square

IV.5.25. (Teorema de dualidade de Poincaré) Se M é uma variedade sem bordo de dimensão m , suavemente orientada, então M é uma variedade de Poincaré, isto é, para cada inteiro p , aplicação bilinear de Poincaré $\xi^p: H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow \mathbb{K}$ define o primeiro espaço como dual do segundo.

Dem: Para uma melhor sistematização, vamos dividir a demonstração em várias partes:

a) Suponhamos que \mathcal{U} é uma i -base de abertos de M tal que cada $U \in \mathcal{U}$ seja uma variedade de Poincaré. Vamos verificar que cada $U \in \mathcal{U}_f$ é uma variedade de Poincaré, isto é, que qualquer conjunto aberto da forma $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$, com $U_j \in \mathcal{U}$, é uma variedade de Poincaré. Isso é trivial se $n = 0$ ou $n = 1$ e o caso geral prova-se por indução em n , visto que supondo o resultado verdadeiro para uniões de n conjuntos, a variedade $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1}$ vai ser a união das variedades de Poincaré $U_1 \cup \dots \cup U_n$ (hipótese de indução) e U_{n+1} , cuja intersecção

$$(U_1 \cup \dots \cup U_n) \cap U_{n+1} = (U_1 \cap U_{n+1}) \cup \dots \cup (U_n \cap U_{n+1})$$

é também uma variedade de Poincaré (mais uma vez pela hipótese de indução), o que, por IV.5.19, implica que $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1}$ é uma variedade de Poincaré.

b) Suponhamos que \mathcal{U} é uma i -base de abertos de M tal que cada $U \in \mathcal{U}$ seja uma variedade de Poincaré. Resulta então de IV.5.12 que cada $U \in \mathcal{U}_s$ é uma variedade de Poincaré.

c) Como referimos em IV.5.21, O espaço cartesiano \mathbb{R}^m admite uma i -base de abertos \mathcal{U} , constituída pelo conjunto vazio e pelos conjuntos da forma

$$\prod_{j=1}^m]a_j, b_j[,$$

onde, para cada $1 \leq j \leq m$, $a_j < b_j$ são números racionais. Uma vez que cada um dos conjuntos de \mathcal{U} , com a sua orientação canónica, é uma variedade de Poincaré (cf. IV.5.9), concluímos de a) e b) e IV.5.24 que todos os abertos

da i -base $((\mathcal{U}_f)_s)_f$, isto é, todos os abertos de \mathbb{R}^m , são variedades de Poincaré.

d) Seja \mathcal{U} a classe dos abertos de M difeomorfos a um aberto de \mathbb{R}^m , por um difeomorfismo que conserve, ou inverta, as orientações. Uma vez que cada ponto $x \in M$ pertence a um aberto da classe \mathcal{U} e que toda a parte aberta de um aberto pertencente a \mathcal{U} pertence trivialmente a \mathcal{U} , concluímos que \mathcal{U} é uma i -base de abertos de M . Tendo em conta c) e IV.5.11, todos os abertos pertencentes a \mathcal{U} são variedades de Poincaré. Tendo em conta a) e b), concluímos agora que todos os abertos da i -base $((\mathcal{U}_f)_s)_f$, isto é, todos os abertos de M , são variedades de Poincaré, em particular, M é uma variedade de Poincaré. \square

IV.5.26. (Corolário) Seja M uma variedade sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada, conexa e não vazia. Tem-se então:

a) $H_c^m(M)$ é um espaço vectorial de dimensão 1 e $f: H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$ é um isomorfismo.

b) Se M não é compacta, então $H^m(M) = \{0\}$ e se M é compacta, então $H^m(M)$ é um espaço vectorial de dimensão 1 e $f: H^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$ é um isomorfismo.

Dem: Pelo teorema de dualidade de Poincaré, sabemos que

$$\xi^0: H^0(M) \times H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$$

define o primeiro espaço como dual do segundo pelo que, uma vez que $H^0(M)$ tem dimensão 1, podemos concluir que $H_c^m(M)$ também tem dimensão 1 e o facto de $f: H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$ ser uma aplicação linear sobrejectiva (cf. IV.4.10) implica que ela é então um isomorfismo. Quanto a b), apenas temos que examinar o que se passa quando M não é compacta, visto que, quando M é compacta, temos um caso particular de a). Ora, tendo em conta IV.4.9, sabemos que se tem então $H_c^0(M) = \{0\}$, pela que a conclusão resulta de que, pelo teorema de dualidade de Poincaré,

$$\xi^m: H^m(M) \times H_c^0(M) \rightarrow \mathbb{K}$$

define o primeiro espaço como dual do segundo. \square

IV.5.27. (Corolário) Seja M uma variedade compacta, sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada. Para cada p , o espaço vectorial $H^p(M)$ tem então dimensão finita, igual à de $H^{m-p}(M)$.⁶⁵

Dem: O facto de a variedade M ser compacta implica que $H_c^{m-p}(M) = H^{m-p}(M)$, pelo que o teorema da dualidade de Poincaré implica que

$$\xi^p: H^p(M) \times H^{m-p}(M) \rightarrow \mathbb{K}$$

⁶⁵Com técnicas um pouco mais elaboradas, pode-se provar que, mesmo que M não seja orientável, o facto de M ser compacta e sem bordo implica que $H^p(M)$ tem dimensão finita (cf., por exemplo [7]).

define o primeiro espaço como dual do segundo. O mesmo teorema implica que esta aplicação define o segundo espaço como dual do primeiro, visto que a aplicação bilinear oposta $H^{m-p}(M) \times H^p(M) \rightarrow \mathbb{K}$ não é mais do que a aplicação de Poincaré

$$\xi^{m-p}: H^{m-p}(M) \times H^p(M) \rightarrow \mathbb{K},$$

multiplicada por $(-1)^{p(m-p)} = \pm 1$ (lembrar que, para $\omega \in \Omega^p(M)$ e $\rho \in \Omega^{m-p}(M)$, tem-se $\rho \wedge \omega = (-1)^{p(m-p)} \omega \wedge \rho$). Aplicando IV.5.6 e IV.5.3, deduzimos agora que $H^p(M)$ e $H^{m-p}(M)$ têm a mesma dimensão finita. \square

§6. Aplicação à demonstração de resultados topológicos.

IV.6.1. Um espaço topológico X diz-se uma *n-esfera topológica*, ou uma *esfera topológica de dimensão n*, onde $n \geq 0$, se for homeomorfo à hipersuperfície esférica $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Um espaço topológico X diz-se um *n-cubo topológico*, ou um *cubo topológico de dimensão n*, onde $n \geq 0$, se for homeomorfo ao cubo $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$.

IV.6.2. Repare-se que uma 0-esfera topológica é simplesmente um espaço topológico com dois elementos e com a topologia discreta (a única topologia separada) e que um 0-cubo topológico é simplesmente um espaço topológico com um único elemento. Repare-se também que toda a esfera topológica e todo o cubo topológico são espaços topológicos compactos.

Note-se que, neste momento, era *a priori* possível um certo espaço topológico ser simultaneamente uma esfera topológica com dimensões distintas, um cubo topológico com dimensões distintas ou uma esfera topológica e um cubo topológico. O que vamos fazer nesta secção implicará no entanto que isso não pode acontecer. Vamos começar por apresentar exemplos importantes de cubos topológicos e de esferas topológicas.

IV.6.3. **a)** Sejam $n \geq 1$ e, para cada $1 \leq j \leq n$, $a_j < b_j$ em \mathbb{R} . Tem-se então que

$$X = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$$

é um cubo topológico de dimensão n e

$$\partial(X) = \{(t_1, \dots, t_n) \in X \mid \exists_j t_j \in \{a_j, b_j\}\}$$

é uma esfera topológica de dimensão $n - 1$.

b) Sejam $n \geq 1, r > 0$ e

$$\overline{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}, \quad S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$$

(norma euclidiana). Tem-se então que \overline{B}_r é um cubo topológico de dimensão n e S_r é uma esfera topológica de dimensão $n - 1$.

c) Sejam $n \geq 1$ e $-1 < a < 1$. Tem-se então que as calotes esféricas

$$X_a = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|(x, t)\| = 1 \wedge t \geq a\}$$

$$Y_a = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|(x, t)\| = 1 \wedge t \leq a\}$$

(norma euclidiana) são cubos topológicos de dimensão n e o bordo comum

$$Z_a = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|(x, t)\| = 1 \wedge t = a\}$$

é uma esfera topológica de dimensão $n - 1$.

Dem: Nas condições de a), podemos considerar, para cada $1 \leq j \leq n$ um homeomorfismo $\varphi_j: [0, 1] \rightarrow [a_j, b_j]$, definido por $\varphi_j(t) = a_j + t(b_j - a_j)$, cujo inverso está definido por $s \mapsto (s - a_j)/(b_j - a_j)$, e então $\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n$ é um difeomorfismo de $[0, 1]^n$ sobre $\prod [a_j, b_j]$, que aplica trivialmente

$\partial([0, 1]^n)$ sobre $\partial(\prod [a_j, b_j])$. Fica assim provado que $\prod [a_j, b_j]$ é um cubo topológico de dimensão n e concluímos que, para verificar que $\partial(\prod [a_j, b_j])$

é uma esfera topológica de dimensão $n - 1$, basta verificá-lo para um sistema particular de valores $a_j < b_j$, o que será feito adiante para $a_j = -1$ e $b_j = 1$.

Notemos agora $\|\cdot\|$ a norma euclidiana e $|\cdot|$ a norma do máximo de \mathbb{R}^n . Consideremos a aplicação contínua $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{x|x|}{\|x\|}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

(a continuidade em 0 é implicada pela igualdade $\|\varphi(x)\| = |x|$), aplicação que vai ser um homeomorfismo por admitir o inverso bilateral $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \frac{x\|x\|}{|x|}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

(a continuidade em 0 é implicada pela igualdade $|\psi(x)| = \|x\|$). Nas notações de b), o homeomorfismo φ vai aplicar

$$[-1, 1]^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$$

sobre $\overline{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ e

$$\partial([-1, 1]^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

sobre $S_1 = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, o que implica que \overline{B}_1 é um cubo topológico de dimensão n e que $\partial([-1, 1]^n)$ é uma esfera topológica de dimensão $n - 1$ (que é o que nos faltava para terminar a demonstração de a)). A conclusão de b) é agora uma consequência de a homotetia $x \mapsto rx$, ser um homeomorfismo de \overline{B}_1 sobre \overline{B}_r , que aplica $S_1 = S^{n-1}$ sobre S_r . Para verificarmos c), começamos por lembrar que, considerando

$$S^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|(x, t)\| = 1\},$$

tem lugar o homeomorfismo $f_-: S^n \setminus \{-e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (projecção estereográfica), definido por $f_-(x, t) = \frac{x}{1+t}$ (cf. IV.3.8). Uma vez que

$$\|f_-(x, t)\|^2 = \frac{\|x\|^2}{(1+t)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{1+t}$$

e que a aplicação $t \mapsto \frac{1-t}{1+t}$ tem derivada $\frac{-2}{(1+t)^2}$ e é, portanto, estritamente decrescente, concluímos que, sendo $r^2 = \frac{1-a}{1+a}$, a restrição de f_- é um homeomorfismo de X_a sobre \overline{B}_a , que aplica Z_a sobre S_r , o que mostra que X_a é um n -cubo topológico e que Z_a é uma $(n-1)$ -esfera topológica. A prova de que Y_a é também um n -cubo topológico pode ser feita, de modo análogo, por consideração da projecção estereográfica f_+ , ou, alternativamente, reduzir-se ao já feito, reparando que Y_a é homeomorfo a X_{-a} , pelo homeomorfismo definido por $(x, t) \mapsto (x, -t)$. \square

IV.6.4. (Um cubo dentro numa esfera) Seja $n \geq 0$ e consideremos a esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Seja $X \subset S^n$ um k -cubo topológico, com $k \geq 0$. Tem-se então $X \neq S^n$ e, para os espaços de cohomologia de de Rham com suporte compacto do aberto $S^n \setminus X$, tem-se $H_c^p(S^n \setminus X) = \{0\}$, para cada $p \neq n$, e $H_c^n(S^n \setminus X)$ tem dimensão 1. Em particular $S^n \setminus X$ é um aberto conexo não vazio.⁶⁶

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

a) Consideremos em S^n a sua orientação usual. Começemos por reparar que, se verificarmos que $H_c^n(S^n \setminus X)$ tem dimensão 1 então, pelo teorema de dualidade de Poincaré, $H^0(S^n \setminus X)$ também tem dimensão 1 pelo que, por IV.1.4, a variedade $S^n \setminus X$ é conexa.

b) Vamos fazer a demonstração por indução na dimensão k do cubo topológico $X \subset S^n$. Para $k = 0$, o resultado é verdadeiro visto que X tem um único elemento e portanto, por uma projecção estereográfica (cf. IV.3.6), $S^n \setminus X$ é difeomorfo a um espaço vectorial de dimensão n , e portanto a \mathbb{R}^n , bastando então ter em conta IV.4.11. Vamos então supor que o resultado é válido sempre que X é um cubo topológico de dimensão k e verificar o que acontece quando X é um cubo topológico de dimensão $k + 1$.

c) Vamos fixar um homeomorfismo $\varphi: [0, 1]^{k+1} \rightarrow X$ e, para cada $a \leq b$ em

⁶⁶No caso em que $n \geq 1$, S^n é, como sabemos, conexo e esta conclusão costuma ser expressa pela afirmação de que um cubo topológico nunca destrói a conexão de S^n .

$[0, 1]$, notar

$$X_{a,b} = \varphi([0, 1]^k \times [a, b]),$$

pondo, em particular

$$X_a = X_{a,a} = \varphi([0, 1]^k \times \{a\}).$$

Reparemos que X_a é homeomorfo a $[0, 1]^k \times \{a\}$, e portanto a $[0, 1]^k$, sendo portanto um cubo topológico de dimensão k .

d) Podemos já concluir que $X \neq S^n$ visto que, caso contrário, e contra a hipótese de indução, $S^n \setminus X_{1/2}$ não era conexo, por ser união dos abertos disjuntos não vazios $\varphi([0, 1]^k \times [0, 1/2])$ e $\varphi([0, 1]^k \times]1/2, 1])$.

e) Uma vez que, por IV.4.10, sabemos que tem lugar uma aplicação linear sobrejectiva $f: H_c^n(S^n \setminus X) \rightarrow \mathbb{K}$, tudo o que temos que provar é que o kernel desta aplicação é $\{0\}$ e que $H_c^p(S^n \setminus X) = \{0\}$, para cada $0 \leq p < n$. Seja então $0 \leq p \leq n$ e $[\omega] \in H_c^p(S^n \setminus X)$, verificando, no caso em que $p = n$, a condição $\int_{S^n \setminus X} \omega = 0$, e vamos mostrar que se tem então $[\omega] = 0$ em $H_c^p(S^n \setminus X)$, o que terminará a demonstração.

f) Seja $a \in [0, 1]$ arbitrário. Pela hipótese de indução, sabemos que se tem $H_c^p(S^n \setminus X_a) = \{0\}$ e que $f: H_c^n(S^n \setminus X_a) \rightarrow \mathbb{K}$ é um isomorfismo, por ser uma aplicação linear sobrejectiva entre espaços com a mesma dimensão. Uma vez que, para a extensão $\omega_{\setminus(S^n \setminus X_a)}$, que se anula fora de $S^n \setminus X$, se tem ainda, no caso em que $p = n$, $\int_{S^n \setminus X_a} \omega_{\setminus(S^n \setminus X_a)} = 0$, podemos então concluir que $[\omega_{\setminus(S^n \setminus X_a)}] = 0$, em $H_c^p(S^n \setminus X_a)$.

g) Vamos melhorar um pouco a conclusão de f), mostrando que, para cada $a \in [0, 1]$, existe um aberto I_a de $[0, 1]$, com $a \in I_a$, tal que, com $\widehat{X}_a = \varphi([0, 1]^k \times I_a)$, se tenha já $[\omega_{\setminus(S^n \setminus \widehat{X}_a)}] = 0$ em $H_c^p(S^n \setminus \widehat{X}_a)$.

Para isso, começamos por reparar que o facto de se ter $[\omega_{\setminus(S^n \setminus X_a)}] = 0$, em $H_c^p(S^n \setminus X_a)$, garante a existência de $\rho \in \Omega_c^{p-1}(S^n \setminus X_a)$ tal que $\omega_{\setminus(S^n \setminus X_a)} = d\rho$, existindo portanto um compacto $K \subset S^n \setminus X_a$ tal que $\rho_x = 0$, para cada $x \notin K$. Tem-se então $X_a \subset S^n \setminus K$ pelo que o aberto $\varphi^{-1}(S^n \setminus K)$ de $[0, 1]^{k+1}$ contém o compacto $[0, 1]^k \times \{a\}$, o que nos permite considerar $\varepsilon > 0$ menor que o mínimo das distâncias dos pontos de $[0, 1]^k \times \{a\}$ ao complementar de $\varphi^{-1}(S^n \setminus K)$ (métrica do máximo de $[0, 1]^{k+1}$). Sendo

$$I_a = \{t \in [0, 1] \mid |t - a| < \varepsilon\},$$

vem $[0, 1]^k \times I_a \subset \varphi^{-1}(S^n \setminus K)$, donde $\widehat{X}_a = \varphi([0, 1]^k \times I_a) \subset S^n \setminus K$, ou seja, $K \subset S^n \setminus \widehat{X}_a$, pelo que $\rho_{\setminus(S^n \setminus \widehat{X}_a)} \in \Omega_c^{p-1}(S^n \setminus \widehat{X}_a)$ vai verificar ainda $\omega_{\setminus(S^n \setminus \widehat{X}_a)} = d(\rho_{\setminus(S^n \setminus \widehat{X}_a)})$, o que mostra que se tem $[\omega_{\setminus(S^n \setminus \widehat{X}_a)}] = 0$ em $H_c^p(S^n \setminus \widehat{X}_a)$, como queríamos.

h) Seja $\delta > 0$ um número de Lebesgue para a cobertura aberta do espaço

métrico compacto $[0, 1]$ pelos conjuntos I_a .⁶⁷ Seja $N > 1$ tal que $1/N < \delta$. Para cada $0 \leq j \leq N$, seja $a_j = j/N \in [0, 1]$. Reparando que cada intervalo $[a_{j-1}, a_j]$ tem diâmetro menor que δ , e está, portanto, contido nalgum dos conjuntos I_a , concluímos que $X_{a_{j-1}, a_j} \subset \widehat{X}_a$, e portanto

$$S^n \setminus \widehat{X}_a \subset S^n \setminus X_{a_{j-1}, a_j},$$

o que, tendo em conta a conclusão de g), implica que se tem ainda

$$[\omega_{\setminus(S^n \setminus X_{a_{j-1}, a_j})}] = 0 \in H_c^p(S^n \setminus X_{a_{j-1}, a_j}).$$

i) Vamos demonstrar, por indução em j , que, para cada $j \geq 1$, $[\omega_{\setminus(S^n \setminus X_{0, a_j})}] = 0$ em $H_c^p(S^n \setminus X_{0, a_j})$. No caso em que $j = 1$, isso é uma consequência de h), visto que $a_0 = 0$. Suponhamos então que isso é verdade para um certo $j < n$. Tem-se então que a união dos abertos $S^n \setminus X_{0, a_j}$ e $S^n \setminus X_{a_j, a_{j+1}}$ de S^n é o aberto $S^n \setminus X_{a_j}$ e a respectiva intersecção é o aberto $S^n \setminus X_{0, a_{j+1}}$ pelo que, uma vez que, pela hipótese de indução em k , e por ser $p - 1 < n$, tem-se $H_c^{p-1}(S^n \setminus X_{a_j}) = \{0\}$, podemos escrever a seguinte porção da sucessão exacta de Mayer-Vietoris (cf. IV.5.16)

$$\{0\} = H_c^{p-1}(S^n \setminus X_{a_j}) \rightarrow H_c^p(S^n \setminus X_{0, a_{j+1}}) \rightarrow H^p(\Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_{0, a_j}) \times \Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_{a_j, a_{j+1}})).$$

Esta sucessão exacta garante-nos que a segunda aplicação linear é injectiva. A imagem do elemento $[\omega_{\setminus(S^n \setminus X_{0, a_{j+1}})}] \in H_c^p(S^n \setminus X_{0, a_{j+1}})$ por essa aplicação linear é o elemento $[(-\omega_{\setminus(S^n \setminus X_{0, a_j})}, \omega_{\setminus(S^n \setminus X_{a_j, a_{j+1}})})]$, o qual é 0, tendo em conta a caracterização de $H^p(\Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_{0, a_j}) \times \Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_{a_j, a_{j+1}}))$ como produto de $H_c^p(S^n \setminus X_{0, a_j})$ e $H_c^p(S^n \setminus X_{a_j, a_{j+1}})$ e o facto de se ter $[\omega_{\setminus(S^n \setminus X_{0, a_j})}] = 0$ em $H_c^p(S^n \setminus X_{0, a_j})$, tendo em conta a hipótese de indução, e $[\omega_{\setminus(S^n \setminus X_{a_j, a_{j+1}})}] = 0$ em $H_c^p(S^n \setminus X_{a_j, a_{j+1}})$, pelo que vimos em h). A injectividade da aplicação linear referida implica agora que $[\omega_{\setminus(S^n \setminus X_{0, a_{j+1}})}] = 0$ em $H_c^p(S^n \setminus X_{0, a_{j+1}})$, o que prova a asserção enunciada nesta alínea.

j) O que estabelecemos em i), para todo o j , reduz-se, no caso em que $j = N$, e portanto $a_j = 1$, à conclusão que $[\omega] = 0$ em $H_c^p(S^n \setminus X)$, o que, de acordo com o que dissémos em e), termina a demonstração. \square

IV.6.5. (Corolário) Um espaço topológico não pode ser simultaneamente um k -cubo topológico e uma n -esfera topológica.

Dem: Se isso acontecesse, S^n seria um k -cubo topológico, contra a conclusão de que um k -cubo topológico contido em S^n tem que ser distinto de S^n . \square

⁶⁷Quem não conhecer o teorema de existência de um número de Lebesgue para uma cobertura aberta de um espaço métrico compacto poderá consultar o exercício IV.37, no fim do capítulo.

IV.6.6. (Jordan-Brouwer: uma esfera dentro duma esfera) Seja $n \geq 0$ e consideremos a esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Seja $X \subset S^n$ uma k -esfera topológica, onde $k \geq 0$. Tem-se então:

1) $k \leq n$.

2) $k = n$ se, e só se, $X = S^n$.

3) Se $k = n - 1$, então $H_c^n(S^n \setminus X)$ tem dimensão 2 e $H_c^p(S^n \setminus X) = \{0\}$, para cada $p \neq n$; em particular $S^n \setminus X$ tem duas componentes conexas.

4) Se $k < n - 1$, então $H_c^n(S^n \setminus X)$ e $H_c^{k+1}(S^n \setminus X)$ têm dimensão 1 e $H_c^p(S^n \setminus X) = \{0\}$, para cada $p \neq n, k + 1$; em particular $S^n \setminus X$ é conexo.

Dem: Vamos dividir a demonstração em várias alíneas:

a) Consideremos a orientação usual em S^n . Começemos por reparar que, quando $H_c^n(S^n \setminus X)$ tiver dimensão 2, o teorema de dualidade de Poincaré garante que $H^0(S^n \setminus X)$ tem dimensão 2 e portanto, por IV.1.4, $S^n \setminus X$ tem duas componentes conexas. Do mesmo modo, quando $H_c^n(S^n \setminus X)$ tiver dimensão 1, $S^n \setminus X$ vai ser conexo.

b) Vamos fazer a demonstração por indução em k , começando por examinar o caso em que $k = 0$, e em que, portanto, X é um conjunto formado por dois elementos. As propriedades 1) e 2) do enunciado são triviais. Considerando a projecção estereográfica a partir de um dos dois pontos de X (cf. IV.3.6), constatamos que $S^n \setminus X$ é difeomorfa ao complementar de um conjunto unitário num espaço vectorial de dimensão n e portanto, por composição com uma translação e um isomorfismo, $S^n \setminus X$ é difeomorfa a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Em particular, cada $H_c^p(S^n \setminus X)$ é isomorfo a $H_c^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ pelo que as propriedades 3) e 4) do enunciado resultam de IV.3.13 e do teorema de dualidade de Poincaré.

c) Vamos, a partir de agora, supor que o resultado é verdadeiro para um certo $k \geq 0$ e verificar o que sucede quando $X \subset S^n$ é uma esfera topológica de dimensão $k + 1$.

d) Consideremos a hipersuperfície esférica $S^{k+1} \subset \mathbb{R}^{k+2} = \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $\varphi: S^{k+1} \rightarrow X$ e definamos

$$X_+ = \varphi(\{(x, t) \in S^{k+1} \mid t \geq 0\}),$$

$$X_- = \varphi(\{(x, t) \in S^{k+1} \mid t \leq 0\}),$$

$$X_0 = \varphi(\{(x, t) \in S^{k+1} \mid t = 0\}),$$

reparando que, pela alínea c) de IV.6.3, X_+ e X_- são cubos topológicos de dimensão $k + 1$ e X_0 é um esfera topológica de dimensão k .

Tem-se então que o aberto $S^n \setminus X_0$ é união dos abertos $S^n \setminus X_+$ e $S^n \setminus X_-$, cuja intersecção é $S^n \setminus X$, o que nos permitirá considerar adiante diferentes porções da correspondente sucessão exacta de Mayer-Vietoris com suporte compacto (cf. IV.5.16), relativamente à qual lembramos que cada

$$H^p(\Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_+) \times \Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_-))$$

é isomorfo a $H_c^p(S^n \setminus X_+) \times H_c^p(S^n \setminus X_-)$ (cf. IV.2.5), sendo portanto, por IV.6.4, igual a $\{0\}$, se $p < n$, e de dimensão 2, se $p = n$.

e) Uma vez que X_0 está contido estritamente em X , e portanto em S^n , a hipótese de indução garante-nos que $k < n$, e portanto que $k + 1 \leq n$, e temos a propriedade 1) do enunciado.

f) Suponhamos que $k + 1 = n$. Pela hipótese de indução, $S^n \setminus X_0$ tem duas componentes conexas. Por IV.6.4, os abertos $S^n \setminus X_+$ e $S^n \setminus X_-$, de união $S^n \setminus X_0$, são conexos o que implica que a sua intersecção $S^n \setminus X$ é vazia (senão a união seria conexa), por outras palavras, tem-se $X = S^n$. Suponhamos agora que $k + 1 < n$. Pela hipótese de indução $S^n \setminus X_0$ é conexo pelo que, por ser união dos abertos não vazios $S^n \setminus X_+$ e $S^n \setminus X_-$, estes não podem ser disjuntos, isto é $S^n \setminus X = (S^n \setminus X_+) \cap (S^n \setminus X_-) \neq \emptyset$, ou seja, $X \neq S^n$. Ficou assim provada a propriedade 2) do enunciado.

g) Suponhamos agora que $k + 1 = n - 1$. Pela hipótese de indução, $H_c^{n-1}(S^n \setminus X_0)$ e $H_c^n(S^n \setminus X_0)$ têm dimensão 1 e $H_c^p(S^n \setminus X_0) = \{0\}$, para $p \neq n, n - 1$. Consideremos a seguinte parte da sucessão exacta de Mayer-Vietoris acima referida:

$$\{0\} \rightarrow H_c^{n-1}(S^n \setminus X_0) \rightarrow H_c^n(S^n \setminus X) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow H_c^n(S^n \setminus X_0) \rightarrow \{0\},$$

onde notámos $\mathcal{E} = H^n(\Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_+) \times \Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_-))$, por razões tipográficas. Uma vez que o primeiro, o terceiro e o quarto espaços têm, respectivamente, dimensões iguais a 1, 2 e 1, deduzimos de IV.3.11 que $H_c^n(S^n \setminus X)$ tem dimensão 2. Por outro lado, para cada $p < n$, temos a parte trivial de mesma sucessão exacta

$$\{0\} \rightarrow H_c^p(S^n \setminus X) \rightarrow \{0\},$$

que nos implica que $H_c^p(S^n \setminus X) = \{0\}$, igualdade que é trivialmente verdadeira para $p > n$. Ficou assim provada a propriedade 3) do enunciado.

h) Suponhamos, por fim, que $k + 1 < n - 1$. Pela hipótese de indução, $H_c^{k+1}(S^n \setminus X_0)$ e $H_c^n(S^n \setminus X_0)$ têm dimensão 1 e $H_c^p(S^n \setminus X_0) = \{0\}$, para $p \neq n, k + 1$. Consideremos as seguintes porções da sucessão exacta de Mayer-Vietoris atrás referida

$$\begin{aligned} \{0\} &\rightarrow H_c^n(S^n \setminus X) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow H_c^n(S^n \setminus X_0) \rightarrow \{0\}, \\ \{0\} &\rightarrow H_c^{k+1}(S^n \setminus X_0) \rightarrow H_c^{k+2}(S^n \setminus X) \rightarrow \{0\}, \end{aligned}$$

onde, mais uma vez, $\mathcal{E} = H^n(\Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_+) \times \Omega_c^\bullet(S^n \setminus X_-))$. Utilizando, mais uma vez, IV.3.11, do facto do segundo e terceiro termos da primeira porção terem respectivamente dimensões 2 e 1 e do facto de o primeiro termo da segunda porção ter dimensão 1 concluímos que $H_c^n(S^n \setminus X)$ e $H_c^{k+2}(S^n \setminus X)$ têm dimensão 1. Por outro lado, para cada $p < n$, distinto de $k + 2$, temos a parte trivial da mesma sucessão exacta

$$\{0\} \rightarrow H_c^p(S^n \setminus X) \rightarrow \{0\},$$

que nos implica que $H_c^p(S^n \setminus X) = \{0\}$, igualdade que é trivialmente verdadeira para $p > n$. Ficou assim provada a propriedade 4) do enunciado. \square

IV.6.7. **(Corolário)** Um espaço topológico não pode ser simultaneamente uma k -esfera topológica e uma n -esfera topológica, com $k \neq n$.

Dem: Se isso acontecesse, concluíamos que S^n era uma k -esfera topológica, o que contrariava a alínea 2) do resultado precedente. \square

IV.6.8. **(Corolário)** Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma k -esfera topológica, então $k \leq n - 1$.

Dem: Considerando a projecção estereográfica $f_+: S^n \setminus \{e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (cf. IV.3.8), a imagem recíproca de X ia ser uma k -esfera topológica contida estritamente em S^n , pelo que basta atender às alíneas 1) e 2) de IV.6.6. \square

IV.6.9. **(Teorema da invariância da dimensão)** Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto não vazio e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e injectiva. Tem-se então $m \leq n$. Em particular, um aberto não vazio de \mathbb{R}^m não pode ser homeomorfo a um aberto não vazio de \mathbb{R}^n , com $m \neq n$.

Dem: Para a primeira afirmação do enunciado, escolhemos $x_0 \in U$ e $r > 0$ tais que a bola fechada de centro x_0 e raio r esteja contida em U e reparamos então que a restrição de f ao compacto $S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x_0\| = r\}$ vai ser um homeomorfismo sobre a sua imagem; uma vez que $S_r(x_0)$ é homeomorfo, por translação, a $S_r(0)$ que, por IV.6.3, é uma esfera topológica de dimensão $m - 1$, deduzimos que $f(S_r(x_0))$ é uma esfera topológica de dimensão $m - 1$ contida em \mathbb{R}^n o que, por IV.6.8, implica que $m - 1 \leq n - 1$, ou seja, $m \leq n$. A segunda afirmação resulta da primeira visto que ficamos com uma aplicação contínua e injectiva de um aberto de \mathbb{R}^m para \mathbb{R}^n , cuja inversa é uma aplicação contínua e injectiva de um aberto de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^m . \square

IV.6.10. **(Corolário)** Um espaço topológico não pode ser simultaneamente um k -cubo topológico e um n -cubo topológico, com $k \neq n$.

Dem: Se isso acontecesse, e supondo já $k < n$, existia um homeomorfismo $f: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^k$, cuja restrição ao aberto $]0, 1[^n$ ia contrariar a conclusão do resultado precedente. \square

IV.6.11. **(Lema)** Para cada $n \geq 0$, o espaço topológico $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um *espaço topológico homogéneo*, no sentido que, dados $x, y \in S^n$, existe um homeomorfismo $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ tal que $\varphi(x) = y$.

Dem: Podemos considerar bases ortonormadas x_1, \dots, x_{n+1} e y_1, \dots, y_{n+1} de \mathbb{R}^{n+1} , tais que $x_1 = x$ e $y_1 = y$ e o isomorfismo ortogonal $\bar{\varphi}: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definido pela condição de se ter $\bar{\varphi}(x_j) = y_j$, para cada j . O facto de cada vector e a sua imagem por $\bar{\varphi}$ terem a mesma norma implica que $\bar{\varphi}(S^n) = S^n$ pelo que obtemos, por restrição de $\bar{\varphi}$, um homeomorfismo $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ tal que $\varphi(x) = y$. \square

IV.6.12. **(Teorema de Jordan-Brouwer)** Sejam $n \geq 1$ e $X \subset S^n$ uma esfera topológica de dimensão $n - 1$. Tem-se então que $S^n \setminus X$ tem duas componentes conexas U_1 e U_2 , que são abertos de S^n , verificando

$$\text{fr}(U_1) = \text{fr}(U_2) = X$$

(fronteiras relativas à topologia de S^n).

Dem: Tendo em conta a alínea 3) de IV.6.6, sabemos que $S^n \setminus X$ tem duas componentes conexas U_1 e U_2 e o facto de $S^n \setminus X$ ser aberto, e portanto uma variedade, implica que U_1 e U_2 são abertos. Resta-nos verificar que a fronteira de cada um destes abertos é igual a X , para o que basta examinar o que se passa com U_1 . O facto de os pontos de U_1 serem interiores a U_1 e de U_2 ser um aberto que não intersecta U_1 , e portanto os pontos de U_2 serem exteriores a U_1 , implica que $\text{fr}(U_1) \subset X$. Resta-nos supor que se tinha $\text{fr}(U_1) \neq X$ e chegar a um absurdo. Seja então $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \text{fr}(U_1)$, e portanto $x_0 \in \text{ext}(U_1)$. Seja V um aberto de S^n , com $x_0 \in V$, tal que $V \cap U_1 = \emptyset$. Seja $f: S^{n-1} \rightarrow X$ um homeomorfismo. Tendo em conta o lema anterior, concluímos que, se necessário compondo f com um homeomorfismo conveniente de S^{n-1} sobre S^{n-1} , pode-se já supor que, para o “polo norte” $(0, 1) \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, se tem $f(0, 1) = x_0$. O facto de $f^{-1}(V)$ ser um aberto de S^{n-1} , contendo $(0, 1)$ permite-nos fixar $0 \leq a < 1$ tal que, para cada $(y, t) \in S^{n-1}$, com $t \geq a$, se tenha $f(y, t) \in V$ (reparar que $\|y\|^2 = 1 - t^2 \leq 1 - a^2$). Sejam então

$$\begin{aligned} X_+ &= f(\{(y, t) \in S^{n-1} \mid t \geq a\}), \\ X_- &= f(\{(y, t) \in S^{n-1} \mid t \leq a\}), \end{aligned}$$

que, tendo em conta IV.6.3, são cubos topológicos de dimensão $n - 1$, contidos em X e de união X , o primeiro dos quais, pelo que dissémos atrás, também contido em V . Tendo em conta IV.6.4, $S^n \setminus X_-$ é conexo. Mas $S^n \setminus X_-$ vai ser a união dos abertos disjuntos dois a dois, não vazios, U_1 e $((S^n \setminus X_-) \cap V) \cup U_2$, pelo que chegámos realmente a um absurdo. \square

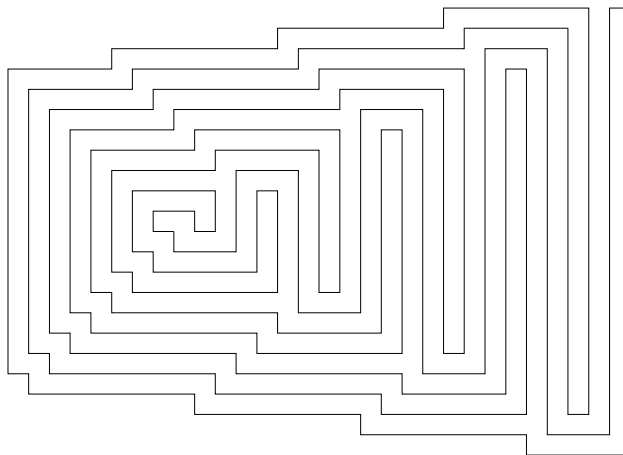


Figura 10

IV.6.13. **(Nota)** O teorema de Jordan-Brouwer foi enunciado originariamente por Jordan, no caso em que $n = 2$ e em que se considera \mathbb{R}^2 em vez de S^2 , embora a sua primeira demonstração satisfatória só tenha aparecido mais tarde, já neste século, e usando técnicas sofisticadas. A passagem do resultado de S^2 para \mathbb{R}^2 (ou, mais geralmente, de S^n para \mathbb{R}^n) é relativamente simples (cf. o exercício IV.42, no fim do capítulo). O resultado parece intuitivamente evidente, quando pensamos na 1-esfera topológica como uma circunferência um pouco deformada, mas um exemplo como o sugerido na figura 10 pode contribuir para enfraquecer um pouco essa intuição.

IV.6.14. **(Teorema de Brouwer da invariância do domínio)** Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e injectiva.⁶⁸ Tem-se então que $f(U)$ é um aberto de \mathbb{R}^n e f é um homeomorfismo de U sobre $f(U)$.

Dem: Basta verificarmos que se tem $f(U)$ aberto em \mathbb{R}^n , visto que, aplicando então esse resultado à restrição de f a cada aberto contido em U , concluímos que f aplica abertos de U em abertos de $f(U)$. Considerando a projecção estereográfica $f_+: S^n \setminus \{e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (cf. IV.3.8), que é um homeomorfismo do aberto $S^n \setminus \{e_{n+1}\}$ de S^n sobre \mathbb{R}^n , basta-nos provar que $f_+^{-1}(f(U))$ é um conjunto aberto em S^n . Seja então $y_0 \in f_+^{-1}(f(U))$ arbitrário, portanto $y_0 = f_+^{-1}(f(x_0))$, para um certo $x_0 \in U$. Seja $r > 0$ tal que a bola fechada,

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\},$$

esteja contida em U e notemos

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}, \\ S_r(x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = r\}. \end{aligned}$$

Reparemos que $B_r(x_0)$ é convexo, e portanto conexo, e que, por translação, $\overline{B}_r(x_0)$ e $S_r(x_0)$ são respectivamente homeomorfos a $\overline{B}_r(0)$ e $S_r(0)$, e portanto, por IV.6.3, são respectivamente um n -cubo topológico e uma $(n-1)$ -esfera topológica. Uma vez que a restrição de $f_+^{-1} \circ f$ ao compacto $\overline{B}_r(x_0)$, sendo contínua e injectiva, é um homeomorfismo sobre a sua imagem, concluímos que $f_+^{-1}(f(\overline{B}_r(x_0)))$ e $f_+^{-1}(f(S_r(x_0)))$ são respectivamente um n -cubo topológico e uma $(n-1)$ -esfera topológica, ambos contidos em S^n . Tendo em conta IV.6.4 e IV.6.12, $S^n \setminus f_+^{-1}(f(\overline{B}_r(x_0)))$ é conexo e $S^n \setminus f_+^{-1}(f(S_r(x_0)))$ tem duas componentes conexas, que são abertos de S^n . Mas, como se realiza facilmente, $S^n \setminus f_+^{-1}(f(S_r(x_0)))$ é a união dos conexos $S^n \setminus f_+^{-1}(f(\overline{B}_r(x_0)))$ e $f_+^{-1}(f(B_r(x_0)))$, cada um dos quais vai estar contido numa das componentes conexas e portanto ser igual a esta. Em particular,

⁶⁸Comparar com IV.6.9.

$f_+^{-1}(f(B_r(x_0)))$ é um aberto que contém y_0 e está contido em $f_+^{-1}(f(U))$, o que mostra que y_0 é interior a $f_+^{-1}(f(U))$, e portanto que $f_+^{-1}(f(U))$ é aberto. \square

§7. Invariância topológica da cohomologia.

As aplicações suavemente homotópicas entre variedades foram definidas em III.7.5, tendo-se provado em IV.1.10 que se está em presença de uma relação de equivalência na classe das aplicações suaves entre duas variedades. Se abirmos mão da suavidade, e exigirmos apenas a continuidade, obtemos uma noção análoga, válida no quadro mais geral dos espaços topológicos.

IV.7.1. Sejam X e Y espaços topológicos. Diz-se que duas aplicações contínuas $f, g: X \rightarrow Y$ são *homotópicas* se existir uma *homotopia* de f para g , isto é, uma aplicação contínua $H: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ tal que $H(0, x) = f(x)$ e $H(1, x) = g(x)$.

IV.7.2. Se X e Y são espaços topológicos, a relação atrás definida é uma relação de equivalência na classe das aplicações contínuas de X para Y .

Dem: A reflexividade e a simetria desta relação são essencialmente triviais: se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua, a aplicação definida por $H(t, x) = f(x)$ é uma homotopia de f para f e se $H: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ é uma homotopia de f para g , obtemos uma homotopia $\hat{H}: [0, 1] \times X \rightarrow Y$, de g para f , definida por $\hat{H}(t, x) = H(1 - t, x)$. A prova da transitividade é mais simples do que em IV.1.10, uma vez que não temos agora necessidade de “arredondar os cantos”. Ora, se $H, \hat{H}: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ forem aplicações contínuas, para as quais $H(0, x) = f(x)$, $H(1, x) = g(x)$, $\hat{H}(0, x) = g(x)$ e $\hat{H}(1, x) = h(x)$, podemos definir uma aplicação $\tilde{H}: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ por

$$\tilde{H}(t, x) = \begin{cases} H(2t, x), & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ \hat{H}(2t - 1, x), & \text{se } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

aplicação que é contínua por ter restrições contínuas aos dois subconjuntos fechados $[0, \frac{1}{2}] \times X$ e $[\frac{1}{2}, 1] \times X$ com união $[0, 1] \times X$, e que verifica $\tilde{H}(0, x) = f(x)$ e $\tilde{H}(1, x) = h(x)$. \square

É claro que, se $M' \subset E'$ e $M \subset E$ são variedades e se $f, g: M' \rightarrow M$ são aplicações suaves suavemente homotópicas, então f e g são também homotópicas no sentido da definição anterior. O nosso próximo objectivo é a prova de que, reciprocamente, no caso em que a variedade M' é compacta e a variedade M não tem bordo duas aplicações suaves que

sejam homotópicas são também suavemente homotópicas. Para isso temos necessidade de introduzir as vizinhanças tubulares de um subconjunto compacto de uma variedade sem bordo.

IV.7.3. (Versão forte do teorema da aplicação inversa) Sejam $M \subset E$ e $\widehat{M} \subset \widehat{E}$ duas variedades sem bordo, com dimensão n , $K \subset M$ um compacto e $f: M \rightarrow \widehat{M}$ uma aplicação suave tal que $f|_K: K \rightarrow \widehat{M}$ seja injectiva e que, para cada $x \in K$, $Df_x: T_x(M) \rightarrow T_{f(x)}(\widehat{M})$ seja um isomorfismo. Existe então um aberto U de M , com $K \subset U$, tal que $f|_U: U \rightarrow f(U)$ seja um difeomorfismo, com $f(U)$ aberto em \widehat{M} .⁶⁹

Dem: Podemos já afastar o caso trivial em que $K = \emptyset$, em que podemos tomar $U = \emptyset$. Para cada $x \in K$, o teorema da aplicação inversa implica a existência de um aberto U_x de M , com $x \in U_x$, tal que a restrição de f seja um difeomorfismo de U_x sobre um aberto V_x de \widehat{M} . Tem-se então que $\bigcup_{x \in K} U_x$

é um aberto de M , contendo K , e o resultado ficará provado se mostrarmos a existência de um aberto U de M , com $K \subset U \subset \bigcup_{x \in K} U_x$, tal que $f|_U$ seja

injectiva, visto que então $f(U) = \bigcup_{x \in K} f(U_x \cap U)$ é um aberto de \widehat{M} e a

aplicação inversa da bijecção $f|_U: U \rightarrow f(U)$ vem suave, por ter restrição suave a cada um dos abertos $f(U_x \cap U) \subset V_x$ (igual à restrição a esse aberto de $(f|_{U_x})^{-1}: V_x \rightarrow U_x$). Vamos então supor que não existia nenhum aberto U , com $K \subset U \subset \bigcup_{x \in K} U_x$, tal que a restrição de f a U seja injectiva e tentar

chegar a um absurdo. Para cada natural $n \geq 1$, podemos considerar então o aberto

$$U_n = \left\{ y \in \bigcup_{x \in K} U_x \mid d(y, K) < \frac{1}{n} \right\},$$

que contém K e está contido na união dos U_x , pelo que a restrição de f a U_n não é injectiva ou seja, existe $x_n \neq y_n$ em U_n tais que $f(x_n) = f(y_n)$. Pela compacidade de K , que garante que as funções distância a x_n e a y_n atingem aí um mínimo, podemos considerar $x'_n, y'_n \in K$ tais que

$$d(x_n, x'_n) = d(x_n, K) < \frac{1}{n}, \quad d(y_n, y'_n) = d(y_n, K) < \frac{1}{n},$$

em particular $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$ e $d(y_n, y'_n) \rightarrow 0$. A compacidade de K garante-nos que, se necessário substituindo todas as sucessões consideradas por subsequências correspondentes a um mesmo conjunto de índices, existe (x', y') em K tal que $(x'_n, y'_n) \rightarrow (x', y')$. O facto de se ter

⁶⁹O teorema da aplicação inversa usual não é mais do que o caso particular do resultado anterior em que tomamos para K um conjunto reduzido a um elemento.

$$d(x_n, x') \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, x'), \quad d(y_n, y') \leq d(y_n, y'_n) + d(y'_n, y'),$$

garante que vem ainda $d(x_n, x') \rightarrow 0$ e $d(y_n, y') \rightarrow 0$, ou seja, $x_n \rightarrow x'$ e $y_n \rightarrow y'$. A continuidade de f garante agora que a sucessão $f(x_n) = f(y_n)$ converge simultaneamente para $f(x')$ e para $f(y')$, o que implica que $f(x') = f(y')$. Pelo facto de a restrição de f a K ser injectiva, deduzimos agora que $x' = y'$ e então, para n suficientemente grande, x_n e y_n são elementos distintos de $U_{x'}$ com a mesma imagem por f , o que é absurdo, tendo em conta o facto de a restrição de f a $U_{x'}$ ser injectiva. \square

IV.7.4. (Vizinhança tubular associada a um compacto) Sejam E um espaço euclidiano, $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $K \subset M$ um conjunto compacto. Existe então um aberto W de E , com $K \subset W$, um aberto U de M , com $K \subset U$, e um real $r > 0$ tais que:

- a)** Para cada $x \in U$ e $w \in T_x(M)^\perp$, com $\|w\| < r$, tem-se $x + w \in W$, em particular, $U \subset W$.
- b)** Para cada $y \in W$, existe um, e um só, $x \in U$ tal que $y - x \in T_x(M)^\perp$ e $\|y - x\| < r$, ou seja, existe um único (x, w) tal que $x \in U$, $w \in T_x(M)^\perp$, $\|w\| < r$ e $y = x + w$.
- c)** É suave a aplicação $\Phi: W \rightarrow U$, definida pela condição de se ter, para cada $y \in W$, $y - \Phi(y) \in T_{\Phi(y)}(M)^\perp$ e $\|y - \Phi(y)\| < r$ (cf. a alínea b)), aplicação que verifica a condição $\Phi(x) = x$, para cada $x \in U$.

É costume dizer então que W é uma vizinhança tubular de U (cf. a figura 11).

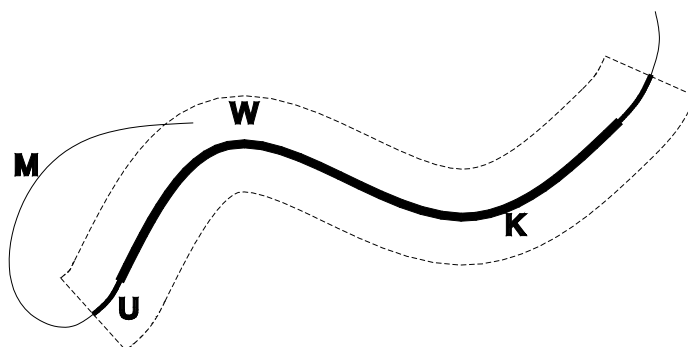


Figura 11

Dem: Podemos afastar o caso trivial em que $K = \emptyset$, caso em que podemos tomar $U = W = \emptyset$ e $r > 0$ arbitrário. Recordemos que, uma vez que M é uma variedade contida num espaço euclidiano de dimensão n , podemos considerar o fibrado vectorial de base M , que a cada $x \in M$ associa o complementar ortogonal $T_x(M)^\perp$ do espaço tangente, e que, por conseguinte, o seu espaço total

$$T(M)^\perp = \{(x, w) \in E \times E \mid x \in M, w \in T_x(M)^\perp\}$$

é uma variedade sem bordo (cf., por exemplo [10]). Para além disso, sendo n a dimensão de E , se M tem dimensão m em x , $T_x(M)^\perp$ tem dimensão $n - m$, pelo que $T(M)^\perp$ tem dimensão n em cada (x, w) . Recordemos ainda que, por uma propriedade geral dos espaços totais dos fibrados vectoriais, para um ponto de $T(M)^\perp$ da forma $(x, 0)$, tem-se

$$T_{(x,0)}(T(M)^\perp) = T_x(M) \times T_x(M)^\perp$$

(cf., por exemplo, [10]). Podemos agora considerar a aplicação suave $\Psi: T(M)^\perp \rightarrow E$, definida por $\Psi(x, w) = x + w$. Para cada ponto do compacto $K \times \{0\} \subset T(M)^\perp$, a aplicação linear

$$D\Psi_{(x,0)}: T_x(M) \times T_x(M)^\perp \rightarrow E$$

está definida por $(u, v) \mapsto u + v$ pelo que o facto de ter lugar a soma directa $E = T_x(M) \oplus T_x(M)^\perp$ implica que esta aplicação linear é um isomorfismo. Uma vez que $\Psi(x, 0) = x$, e portanto a restrição de Ψ a $K \times \{0\}$ é injectiva, podemos aplicar IV.7.3 para concluir a existência de um aberto \mathcal{U}' de $T(M)^\perp$, contendo $K \times \{0\}$, e de um aberto W' de E tais que a restrição de Ψ seja um difeomorfismo de \mathcal{U}' sobre W' . Consideremos em $E \times E$ a norma do máximo e seja $r > 0$ menor que a distância estritamente positiva do compacto $K \times \{0\}$ ao fechado $T(M)^\perp \setminus \mathcal{U}'$.⁷⁰ Sendo $U = \{x \in M \mid d(x, K) < r\}$, U é um aberto de M contendo K e, para cada $x \in U$ e $w \in T_x(M)^\perp$, com $\|w\| < r$, vem $d((x, w), K \times \{0\}) < r$, portanto $(x, w) \in \mathcal{U}'$. Podemos então considerar o aberto

$$\mathcal{U} = \{(x, w) \in T(M)^\perp \mid x \in U, \|w\| < r\}$$

de $T(M)^\perp$, que contém $K \times \{0\}$ e está contido em \mathcal{U}' , e a restrição de Ψ vai ser um difeomorfismo de \mathcal{U} sobre um aberto W de E , contido em W' , aberto que contém U , e portanto também K , uma vez que $\Psi(x, 0) = x$. As alíneas a) e b) do enunciado são agora triviais e a alínea c) resulta de que a aplicação Φ não é mais do que a composta do difeomorfismo $\Psi^{-1}: W \rightarrow \mathcal{U}$ com a primeira projecção $\mathcal{U} \rightarrow U$, desde que se repare que, para $x \in U$, $\Psi(x, 0) = x$. \square

Quando a variedade sem bordo M é compacta, podemos em IV.7.4 tomar para compacto K o próprio M e as respectivas conclusões podem então ser enunciadas de modo mais completo.

IV.7.5. (Vizinhanças tubulares das variedades compactas) Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade compacta, sem bordo. Tendo em

⁷⁰ $r > 0$ arbitrário se fosse $\mathcal{U}' = T(M)^\perp$.

conta IV.7.4, podemos então garantir a existência de $r > 0$ e de um aberto W de E , tais que:

a) Para cada $x \in M$ e $w \in T_x(M)^\perp$, com $\|w\| < r$, tem-se $x + w \in W$, em particular, $M \subset W$.

b) Para cada $y \in W$, existe um, e um só, $x \in M$ tal que $y - x \in T_x(M)^\perp$ e $\|y - x\| < r$, ou seja, existe um único (x, w) tal que $x \in M$, $w \in T_x(M)^\perp$, $\|w\| < r$ e $y = x + w$.

c) É suave a aplicação $\Phi: W \rightarrow M$, definida pela condição de se ter, para cada $y \in W$, $y - \Phi(y) \in T_{\Phi(y)}(M)^\perp$ e $\|y - \Phi(y)\| < r$, aplicação que verifica $\Phi(x) = x$, para cada $x \in M$.

Neste caso podemos afirmar mais, nomeadamente:

d) W é o conjunto dos $y \in E$ tais que $d(y, M) < r$ e, para cada $y \in W$, $\Phi(y)$ é o único elemento de M a distância mínima de y .⁷¹

Costuma-se então dizer que W é uma *vizinhança tubular* de M .

Dem: Podemos já afastar o caso trivial em que $M = \emptyset$, em que se toma $W = \emptyset$ e $r > 0$ arbitrário. Pela condição c), para cada $y \in W$, $d(y, M) < r$. Suponhamos agora que $y \in E$ é tal que $d(y, M) < r$ e que $x_0 \in M$ é um ponto a distância mínima de y , o que implica, em particular, que $\|y - x_0\| < r$. Sendo $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação suave definida por

$$f(x) = \|y - x\|^2 = \langle y - x, y - x \rangle,$$

o facto de f atingir um mínimo em x_0 e de M ser uma variedade sem bordo implica que $Df_{x_0}: T_{x_0}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é a aplicação linear nula, isto é, que, para cada $w \in T_{x_0}(M)$,

$$0 = Df_{x_0}(w) = 2\langle y - x_0, w \rangle.$$

Ficou assim provado que $y - x_0 \in T_{x_0}(M)^\perp$, o que, por a), implica que $y = x_0 + (y - x_0) \in W$. Pela definição em c), vemos que $x_0 = \Phi(y)$, o que mostra que $\Phi(y)$ é realmente o único ponto de M a distância mínima de y . \square

IV.7.6. Sejam $M' \subset E'$ uma variedade compacta e $M \subset E$ uma variedade sem bordo. Sejam $f, g: M' \rightarrow M$ duas aplicações suaves homotópicas. Tem-se então que f e g são mesmo suavemente homotópicas.

Dem: Podemos já afastar o caso trivial em que $M' = \emptyset$. Seja então $H: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ uma aplicação contínua tal que $H(0, x) = f(x)$ e $H(1, x) = g(x)$. Em particular a restrição de H ao subconjunto fechado $\{0, 1\} \times M'$ de $[0, 1] \times M'$ é suave, por ter restrição suave a cada um dos abertos $\{0\} \times M'$ e $\{1\} \times M'$ de $\{0, 1\} \times M'$. Considerando o subconjunto compacto $H([0, 1] \times M')$ de M , deduzimos de IV.7.4 a existência de um aberto W de E , contendo esse compacto e de uma aplicação suave $\Phi: W \rightarrow M$ tal que, para cada $y \in H([0, 1] \times M')$, $\Phi(y) = y$. Seja $\delta > 0$

⁷¹Se não quisermos afastar o caso trivial em que $M = \emptyset$, temos que usar a convenção que a distância de y ao conjunto vazio é $+\infty$ (o ínfimo do conjunto do vazio, sendo o máximo dos seus minorantes, só pode ser olhado como $+\infty$).

menor que a distância estritamente positiva do compacto $H([0, 1] \times M')$ ao fechado $E \setminus W$.⁷² Tendo em conta III.8.6, podemos considerar uma aplicação suave $\hat{H}: [0, 1] \times M' \rightarrow E$ tal que, para cada $(t, x) \in [0, 1] \times M'$,

$$\|\hat{H}(t, x) - H(t, x)\| < \delta,$$

e portanto $\hat{H}(t, x) \in W$, e que, para cada $(t, x) \in \{0, 1\} \times M'$, $\hat{H}(t, x) = H(t, x)$, e portanto ainda $\hat{H}(0, x) = f(x)$ e $\hat{H}(1, x) = g(x)$. Podemos finalmente considerar a aplicação suave $\tilde{H}: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ definida por $\tilde{H}(t, x) = \Phi(\hat{H}(t, x))$, para a qual se vai ter ainda $\tilde{H}(0, x) = f(x)$ e $\tilde{H}(1, x) = g(x)$, o que mostra que f e g são suavemente homotópicas. \square

IV.7.7. Sejam $M' \subset E'$ uma variedade compacta e $M \subset E$ uma variedade sem bordo. Se $f: M' \rightarrow M$ é uma aplicação contínua, então existe uma aplicação suave $g: M' \rightarrow M$ homotópica a f e, se $g, \hat{g}: M' \rightarrow M$ são aplicações suaves homotópicas a f , então, para cada p ,

$$H^p(g) = H^p(\hat{g}): H^p(M) \rightarrow H^p(M').$$

Dem: Podemos já afastar o caso trivial em que $M' = \emptyset$. Considerando o subconjunto compacto $f(M')$ de M , deduzimos de IV.7.4 a existência de um aberto W de E , contendo esse compacto e de uma aplicação suave $\Phi: W \rightarrow M$ tal que, para cada $y \in f(M')$, $\Phi(y) = y$. Seja $\delta > 0$ menor que a distância estritamente positiva do compacto $f(M')$ ao fechado $E \setminus W$.⁷³ Tendo em conta III.8.5, podemos considerar uma aplicação suave $\tilde{g}: M' \rightarrow E$ tal que, para cada $x \in M'$, $\|\tilde{g}(x) - f(x)\| < \delta$, e portanto $\tilde{g}(x) \in W$, pelo que podemos definir uma aplicação suave $g: M' \rightarrow M$ por $g(x) = \Phi(\tilde{g}(x))$. Seja $\tilde{H}: [0, 1] \times M' \rightarrow E$ a aplicação contínua definida por

$$\tilde{H}(t, x) = f(x) + t(\tilde{g}(x) - f(x)),$$

para a qual se tem $\tilde{H}(0, x) = f(x)$ e $\tilde{H}(1, x) = \tilde{g}(x)$. Para cada $(t, x) \in [0, 1] \times M'$, tem-se

$$\|\tilde{H}(t, x) - f(x)\| = t\|\tilde{g}(x) - f(x)\| < \delta,$$

pelo que $\tilde{H}(t, x) \in W$, o que nos permite definir uma aplicação contínua $H: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ por $H(t, x) = \Phi(\tilde{H}(t, x))$. Tem-se então $H(0, x) = \Phi(f(x)) = f(x)$ e $H(1, x) = \Phi(\tilde{g}(x)) = g(x)$, o que mostra que a aplicação contínua $f: M' \rightarrow M$ é realmente homotópica à aplicação suave $g: M' \rightarrow M$. Por fim, se $g, \hat{g}: M' \rightarrow M$ são duas aplicações suaves, ambas homotópicas a f , concluíamos, por transitividade, que g e \hat{g} são homotópicas e portanto, por IV.7.6, também suavemente homotópicas o que, por IV.1.12, implica que, para cada p , $H^p(g) = H^p(\hat{g}): H^p(M) \rightarrow H^p(M')$. \square

⁷²No caso em que fosse $W = E$, tomávamos $\delta > 0$ arbitrário.

⁷³No caso em que fosse $W = E$, tomávamos $\delta > 0$ arbitrário.

IV.7.8. Sejam $M' \subset E'$ uma variedade compacta e $M \subset E$ uma variedade sem bordo. Se $f: M' \rightarrow M$ é uma aplicação contínua, define-se, para cada p , uma aplicação linear $H^p(f): H^p(M) \rightarrow H^p(M')$, pondo $H^p(f) = H^p(g)$, onde $g: M' \rightarrow M$ é uma aplicação suave homotópica a f arbitrária.

É claro que, no caso em que a aplicação contínua f é suave, a definição anterior coincide com a já conhecida, uma vez que podemos tomar para g o próprio f .

IV.7.9. Sejam $M' \subset E'$ uma variedade compacta e $M \subset E$ uma variedade sem bordo. Se $f, g: M' \rightarrow M$ são aplicações contínuas homotópicas, então $H^p(f) = H^p(g): H^p(M) \rightarrow H^p(M')$.

Dem: Basta atender a que, se $h: M' \rightarrow M$ é uma aplicação suave homotópica a f , então h é também homotópica a g . \square

Os dois resultados anteriores exprimem a invariância topológica da cohomologia de de Rham, no quadro particular em que o domínio é uma variedade compacta e o espaço de chegada é uma variedade sem bordo. Com técnicas mais elaboradas de aproximação, como por exemplo as descritas em [5], pode-se estudar essa invariância num quadro mais geral. O facto de termos reduzido o nosso estudo ao quadro particular referido, obriga-nos a enunciar a propriedade de functorialidade como três resultados distintos.

IV.7.10. **(Functorialidade) a)** Sejam $M'' \subset E''$ uma variedade compacta, $M' \subset E'$ e $M \subset E$ variedades sem bordo, $f: M'' \rightarrow M'$ uma aplicação contínua e $g: M' \rightarrow M$ uma aplicação suave. Para cada p , tem-se então

$$H^p(g \circ f) = H^p(f) \circ H^p(g): H^p(M) \rightarrow H^p(M'').$$

b) Sejam $M'' \subset E''$ e $M' \subset E'$ variedades compactas, $M \subset E$ uma variedade sem bordo, $f: M'' \rightarrow M'$ uma aplicação suave e $g: M' \rightarrow M$ uma aplicação contínua. Para cada p , tem-se então

$$H^p(g \circ f) = H^p(f) \circ H^p(g): H^p(M) \rightarrow H^p(M'').$$

c) Sejam $M'' \subset E''$ uma variedade compacta, $M' \subset E'$ uma variedade compacta e sem bordo, $M \subset E$ uma variedade sem bordo e $f: M'' \rightarrow M'$ e $g: M' \rightarrow M$ aplicações contínuas. Para cada p , tem-se então

$$H^p(g \circ f) = H^p(f) \circ H^p(g): H^p(M) \rightarrow H^p(M'').$$

Dem: Para a alínea a), consideramos uma aplicação suave $\hat{f}: M'' \rightarrow M'$ e uma aplicação contínua $H: [0, 1] \times M'' \rightarrow M'$ tal que $H(0, x) = f(x)$ e $H(1, x) = \hat{f}(x)$ e reparamos que tem então lugar uma aplicação contínua $\tilde{H}: [0, 1] \times M'' \rightarrow M$ definida por $\tilde{H}(t, x) = g(H(t, x))$, para a qual se tem $\tilde{H}(0, x) = g \circ f(x)$ e $\tilde{H}(1, x) = g \circ \hat{f}(x)$, de onde deduzimos que

$$H^p(g \circ f) = H^p(g \circ \hat{f}) = H^p(\hat{f}) \circ H^p(g) = H^p(f) \circ H^p(g).$$

Para a alínea b), consideramos uma aplicação suave $\hat{g}: M' \rightarrow M$ e uma aplicação contínua $\hat{H}: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ tal que $\hat{H}(0, y) = g(y)$ e $\hat{H}(1, y) = \hat{g}(y)$ e reparamos que tem então lugar uma aplicação contínua $\tilde{H}: [0, 1] \times M'' \rightarrow M$ definida por $\tilde{H}(t, x) = \hat{H}(t, f(x))$, para a qual se tem $\tilde{H}(0, x) = g \circ f(x)$ e $\tilde{H}(1, x) = \hat{g} \circ f(x)$, de onde deduzimos que

$$H^p(g \circ f) = H^p(\hat{g} \circ f) = H^p(f) \circ H^p(\hat{g}) = H^p(f) \circ H^p(g).$$

Para a alínea c), combinamos os processos anteriores, considerando aplicações suaves $\hat{f}: M'' \rightarrow M'$ e $\hat{g}: M' \rightarrow M$ e aplicações contínuas

$$H: [0, 1] \times M'' \rightarrow M', \quad \hat{H}: [0, 1] \times M' \rightarrow M,$$

verificando $H(0, x) = f(x)$, $H(1, x) = \hat{f}(x)$, $\hat{H}(0, y) = g(y)$ e $\hat{H}(1, y) = \hat{g}(y)$ e reparamos que tem então lugar uma aplicação contínua

$$\tilde{H}: [0, 1] \times M'' \rightarrow M, \quad \tilde{H}(t, x) = \hat{H}(t, H(t, x)),$$

para a qual se tem $\tilde{H}(0, x) = g \circ f(x)$ e $\tilde{H}(1, x) = \hat{g} \circ \hat{f}(x)$, de onde deduzimos que

$$H^p(g \circ f) = H^p(\hat{g} \circ \hat{f}) = H^p(\hat{f}) \circ H^p(\hat{g}) = H^p(f) \circ H^p(g). \square$$

IV.7.11. (**Corolário**) Sejam $M' \subset E'$ e $M \subset E$ variedades compactas e sem bordo e $f: M' \rightarrow M$ um homeomorfismo. Para cada p , tem-se então que

$$H^p(f): H^p(M) \rightarrow H^p(M')$$

é um isomorfismo e $H^p(f)^{-1} = H^p(f^{-1})$.

Dem: Aplicando a alínea c) de IV.7.10 às aplicações contínuas $f: M' \rightarrow M$ e $f^{-1}: M \rightarrow M'$, concluímos que

$$\begin{aligned} Id_{H^p(M)} &= H^p(Id_M) = H^p(f \circ f^{-1}) = H^p(f^{-1}) \circ H^p(f), \\ Id_{H^p(M')} &= H^p(Id_{M'}) = H^p(f^{-1} \circ f) = H^p(f) \circ H^p(f^{-1}), \end{aligned}$$

donde o resultado. \square

EXERCÍCIOS

Ex IV.1 Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ duas variedades e $f: M' \rightarrow M$ uma aplicação suave. Diz-se que uma aplicação suave $g: M \rightarrow M'$ é um *inverso esquerdo* de f , *módulo homotopia suave* (respectivamente um *inverso direito* de f , *módulo homotopia suave*) se $g \circ f: M' \rightarrow M'$ é suavemente

homotópico a $Id_{M'}$ (respectivamente se $f \circ g: M \rightarrow M$ é suavemente homotópico a Id_M). Diz-se que uma aplicação suave $g: M \rightarrow M'$ é um inverso de f , *módulo homotopia suave*, se for simultaneamente um inverso esquerdo e um inverso direito, em ambos os casos *módulo homotopia suave*, e, quando existir uma tal aplicação g , diz-se que f é *invertível, módulo homotopia suave*. Diz-se que as variedades M e M' são *homotopicamente equivalentes* se existir $f: M' \rightarrow M$ invertível, *módulo homotopia suave*.

a) Mostrar que, se $f: M' \rightarrow M$ é um difeomorfismo, então f é invertível, *módulo homotopia suave*, e $f^{-1}: M \rightarrow M'$ é um inverso de f , *módulo homotopia suave*. Em particular duas variedades difeomorfas também são homotopicamente equivalentes.

b) Mostrar que, se $f: M'' \rightarrow M'$ e $g: M' \rightarrow M$ são aplicações suaves invertíveis, *módulo homotopia suave*, então $g \circ f: M'' \rightarrow M$ é também invertível, *módulo homotopia suave*. Deduzir daqui que a relação “homotopicamente equivalente” é uma relação de equivalência nas classes das variedades.

c) Mostrar que, se $g, \hat{g}: M \rightarrow M'$ são suavemente homotópicas e se g é um inverso esquerdo (respectivamente um inverso direito) de f *módulo homotopia suave*, então o mesmo acontece a \hat{g} .

d) Mostrar que, se uma aplicação suave $f: M' \rightarrow M$ admite um inverso esquerdo $g: M \rightarrow M'$, *módulo homotopia suave*, e um inverso direito $\hat{g}: M \rightarrow M'$, *módulo homotopia suave*, então g e \hat{g} são suavemente homotópicas, e portanto g (tal como \hat{g}) é um inverso de f , *módulo homotopia suave*. **Sugestão:** Lembrar a demonstração, por certo já encontrada no quadro dos semi-grupos com elemento neutro, de que se um elemento possui um inverso direito e um inverso esquerdo, então estes são iguais.

e) Mostrar que, se $f: M' \rightarrow M$ é invertível, *módulo homotopia suave*, então, para cada p , $H^p(f): H^p(M) \rightarrow H^p(M')$ é um isomorfismo.

Ex IV.2 (Só para quem conheça os fundamentos da Teoria das Categorias)

a) Mostrar que se pode considerar naturalmente uma categoria cujos objectos são as variedades e cujos morfismos entre duas variedades são as classes de equivalência de aplicações suaves para a relação de “homotopia suave”. Verificar que, para cada inteiro p , a cohomologia de de Rham de grau p pode ser olhada como um functor contravariante da categoria anterior para a dos espaços vectoriais e reinterpretar o exercício IV.1 sob este ponto de vista.

b) Mostrar que as variedades suavemente contrácteis são precisamente aquelas que são isomorfas a variedades reduzidas a um ponto, na categoria atrás referida e reobter, a partir daí, a caracterização dos espaços de cohomologia de de Rham de uma tal variedade, obtida em IV.1.13.

Ex IV.3 Sejam $M \subset E$ uma variedade suavemente contráctil e $M' \subset E'$ uma variedade conexa. Mostrar que quaisquer aplicações suaves $f, g: M \rightarrow M'$ são suavemente homotópicas (comparar com IV.1.14). **Sugestão:** Utilizar a hipótese de M' ser conexa para mostrar que duas aplicações constantes $M \rightarrow M'$ são sempre suavemente homotópicas. Utilizar IV.1.11 para

mostrar que qualquer aplicação suave $M \rightarrow M'$ é suavemente homotópica a uma certa aplicação constante.

Ex IV.4 O que será um produto de uma família de espaços vectoriais constituída por um único elemento (isto é, em que o conjunto dos índices seja unitário)? E um produto de uma família vazia de espaços vectoriais?

Ex IV.5 Sejam $(E_j)_{j \in J}$ uma família de espaços vectoriais, E um espaço vectorial e, para cada $j \in J$, $\hat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$ uma aplicação linear.

a) Suponhamos que E é um produto dos E_j , com as projecções $\hat{\pi}_j$. Mostrar que, dados um espaço vectorial F , e, para cada j , uma aplicação linear $\lambda_j: F \rightarrow E_j$, existe uma, e uma só, aplicação linear $\lambda: F \rightarrow E$ tal que, para cada j , $\hat{\pi}_j \circ \lambda = \lambda_j$.⁷⁴

b) Suponhamos que, quaisquer que sejam o espaço vectorial F e as aplicações lineares $\lambda_j: F \rightarrow E_j$, existe uma, e uma só, aplicação linear $\lambda: F \rightarrow E$ tal que, para cada j , $\hat{\pi}_j \circ \lambda = \lambda_j$. Mostrar que E é um produto dos E_j , com as projecções $\hat{\pi}_j$. **Sugestão:** Sendo $\mu: E \rightarrow \prod E_j$ a aplicação linear definida por $\mu(x) = (\hat{\pi}_j(x))_{j \in J}$, utilizar a hipótese para definir uma aplicação linear $\lambda: \prod E_j \rightarrow E$, que se mostrará ser um inverso bilateral de μ .

Ex IV.6 O que será uma soma de uma família de espaços vectoriais constituída por um único elemento (isto é, em que o conjunto dos índices seja unitário)? E uma soma de uma família vazia de espaços vectoriais?

Ex IV.7 Sejam $(E_j)_{j \in J}$ uma família de espaços vectoriais, E um espaço vectorial e, para cada $j \in J$, $\hat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$ uma aplicação linear.

a) Suponhamos que E é uma soma dos E_j , com as injecções $\hat{\iota}_j$. Mostrar que, dados um espaço vectorial F e, para cada j , uma aplicação linear $\lambda_j: E_j \rightarrow F$, existe uma, e uma só, aplicação linear $\lambda: E \rightarrow F$ tal que, para cada j , $\lambda \circ \hat{\iota}_j = \lambda_j$, nomeadamente a definida por

$$\lambda\left(\sum_j \iota_j(x_j)\right) = \sum_j \lambda_j(x_j),$$

onde $(x_j)_{j \in J}$ é uma família essencialmente finita, com $x_j \in E_j$.⁷⁵

b) Suponhamos que, quaisquer que sejam o espaço vectorial F e as aplicações lineares $\lambda_j: E_j \rightarrow F$, existe uma, e uma só, aplicação linear $\lambda: E \rightarrow F$ tal que, para cada j , $\lambda \circ \hat{\iota}_j = \lambda_j$. Mostrar que E é uma soma dos E_j , com as injecções $\hat{\iota}_j$. **Sugestão:** Sendo $\hat{E} \subset \prod E_j$ a soma construída a partir do produto cartesiano pelo método descrito em IV.2.10, considerar a aplicação linear $\mu: \hat{E} \rightarrow E$ definida por $\mu((x_j)_{j \in J}) = \sum \hat{\iota}_j(x_j)$ e utilizar a

⁷⁴Esta condição exprime que, no sentido da teoria das categorias, E é um produto dos E_j , com as projecções $\hat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$.

⁷⁵Esta condição exprime que, no sentido da teoria das categorias, E é uma soma dos E_j , com as injecções $\hat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$.

hipótese para definir uma aplicação linear $\lambda: E \rightarrow \widehat{E}$, que se mostrará ser um inverso bilateral de μ .

Ex IV.8 Enunciar de forma precisa, e demonstrar, o facto de a soma de espaços vectoriais, tal como o produto, estar definida a menos de isomorfismo.

Ex IV.9 Sejam $(E_j)_{j \in J}$ e $(F_j)_{j \in J}$ famílias de espaços vectoriais e, para cada $j \in J$, $\lambda_j: E_j \rightarrow F_j$ uma aplicação linear. Se E e F são produtos daquelas famílias, com as projecções $\widehat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$ e $\widehat{\pi}_j: F \rightarrow F_j$, respectivamente, define-se o *produto* das aplicações lineares λ_j como sendo a única aplicação linear $\lambda: E \rightarrow F$ tal que, para cada j , $\widehat{\pi}_j \circ \lambda = \lambda_j \circ \widehat{\pi}_j$ (cf. o exercício IV.5). Do mesmo modo, se E' e F' são somas daquelas famílias, com as injecções $\widehat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$ e $\widehat{\iota}_j: F_j \rightarrow F$, respectivamente, define-se a *soma* das aplicações lineares λ_j como sendo a única aplicação linear $\lambda': E' \rightarrow F'$ tal que, para cada j , $\widehat{\iota}_j \circ \lambda_j = \lambda' \circ \widehat{\iota}_j$ (cf. o exercício IV.7).

a) No caso em que E e F são os produtos cartesianos das famílias $(E_j)_{j \in J}$ e $(F_j)_{j \in J}$ e as projecções consideradas são as projecções canónicas, verificar que o produto das aplicações lineares λ_j é o produto cartesiano usual de aplicações.

b) Verificar que a soma de aplicações lineares, definida acima, é dada, mais explicitamente por $\lambda'(x) = \sum \widehat{\iota}_j(\lambda_j(\widehat{\pi}_j(x)))$, onde $(x_j)_{j \in J}$ é uma família essencialmente finita de vectores $x_j \in E_j$ tal que $x = \sum \widehat{\iota}_j(x_j)$, ou seja, por outras palavras, por

$$\lambda'(x) = \sum_{j \in J} \widehat{\iota}_j(\lambda_j(\widehat{\pi}_j(x))),$$

onde os $\widehat{\pi}_j: E' \rightarrow E_j$ são as projecções associadas à soma (cf. IV.2.11).

c) Suponhamos que o conjunto de índices J é finito e que E e F são produtos das famílias $(E_j)_{j \in J}$ e $(F_j)_{j \in J}$, com as projecções $\widehat{\pi}_j: E \rightarrow E_j$ e $\widehat{\pi}_j: F \rightarrow F_j$, respectivamente, e consideremos as injecções associadas $\widehat{\iota}_j: E_j \rightarrow E$ e $\widehat{\iota}_j: F_j \rightarrow F$, que sabemos definirem E e F como somas daquelas famílias (cf. IV.2.13). Mostrar que a soma das aplicações lineares λ_j coincide então com o respectivo produto.

d) Generalizar a conclusão de c) ao caso em que o conjunto dos índices é infinito, considerando, nas condições de IV.2.10, os subespaços soma $E_0 \subset E$ e $F_0 \subset F$.

Ex IV.10 Seja J um conjunto de índices e seja, para cada $j \in J$, C_j^\bullet um complexo de cocadeias, definido pelos espaços vectoriais C_j^p , com $p \in \mathbb{Z}$, e pelas aplicações lineares cobordo $d_j^p: C_j^p \rightarrow C_j^{p+1}$. Suponhamos que, para cada $p \in \mathbb{Z}$, se considera um produto C^p da família dos C_j^p , definido pelas projecções $\widehat{\pi}_j^p: C^p \rightarrow C_j^p$ e consideremos o correspondente complexo de cocadeias produto C^\bullet (cf. IV.2.4). Considerando, para cada p , as injecções

associadas $\hat{\iota}_j^p: C_j^p \rightarrow C^p$, mostrar que os $\hat{\iota}_j^\bullet = (\hat{\iota}_j^p)_{p \in \mathbb{Z}}$ são morfismos de complexos de cocadeias de C_j^\bullet para C^\bullet e que os correspondentes $H^p(\hat{\iota}_j^\bullet): H^p(C_j^\bullet) \rightarrow H^p(C^\bullet)$ são as injecções associadas à apresentação de $H^p(C^\bullet)$ como produto dos $H^p(C_j^\bullet)$ (cf. IV.2.5).

Ex IV.11 Sejam $M \subset E$ uma variedade e $(U_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de M disjuntos dois a dois e de união M . Notando $\iota_j: U_j \rightarrow M$ as inclusões, definidas por $\iota_j(x) = x$, viu-se em IV.2.6 que o complexo de cocadeias $\Omega^\bullet(M)$ é um produto dos complexos de cocadeias $\Omega^\bullet(U_j)$, tendo como projecções as famílias de aplicações lineares $\iota_j^*: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(U_j)$ e que, em consequência, para cada p , $H^p(M)$ é um produto dos $H^p(U_j)$, definido pelas projecções $H^p(\iota_j)$, que associam a cada $[\omega]$ as classes $[\omega|_{U_j}]$. Determinar o que são as injecções associadas $\Omega^p(U_j) \rightarrow \Omega^p(M)$ e, consequentemente, as injecções associadas $H^p(U_j) \rightarrow H^p(M)$.

Ex IV.12 a) Consideremos os espaços vectoriais e aplicações lineares representados no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\lambda} & F & \xrightarrow{\mu} & G \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ E' & \xrightarrow{\lambda'} & F' & \xrightarrow{\mu'} & G' \end{array}$$

e suponhamos que α , β e γ são isomorfismos, que a primeira linha é uma sucessão exacta e que o diagrama é *comutativo*, no sentido de se ter $\beta \circ \lambda = \lambda' \circ \alpha$ e $\gamma \circ \mu = \mu' \circ \beta$. Mostrar que a segunda linha é então também exacta.

b) Utilizar a conclusão de a) para mostrar que, nas hipóteses de IV.3.4 e IV.3.5, tem também lugar, com morfismos convenientes, uma sucessão exacta (dita também de Mayer-Vietoris)

$$H^{p-1}(U \cap V) \xrightarrow{\partial^{p-1}} H^p(M) \longrightarrow H^p(U) \times H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V) \xrightarrow{\partial^p} H^{p+1}(M).$$

Ex IV.13 Consideremos a circunferência $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, com a orientação que lhe vem de ser bordo da bola fechada de centro 0 e raio 1, e os subconjuntos abertos S^+ e S^- de S^1 , com união S^1 , definidos na demonstração de IV.3.12. Consideremos a porção da sucessão exacta de Mayer-Vietoris correspondente

$$H^0(\Omega^\bullet(S^+) \times \Omega^\bullet(S^-)) \xrightarrow{H^0(\mu^*)} H^0(S^+ \cap S^-) \xrightarrow{\partial^0} H^1(S^1) \longrightarrow \{0\}.$$

Reparemos que $S^+ \cap S^-$ é o conjunto dos $(x, y) \in S^1$ tais que $x \neq 0$, tendo assim duas componentes conexas

$$S_d = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}, \quad S_e = \{(x, y) \in S^1 \mid x < 0\},$$

ambas naturalmente difeomorfas a $] -1, 1[$ pela projecção no segundo factor.

Sendo $f_d, f_e: S^+ \cap S^- \rightarrow \mathbb{R}$ as aplicações com valores constantes 1 em S_d e 0 em S_e e com valores constantes 0 em S_d e 1 em S_e , respectivamente, sabemos portanto que $H^0(S^+ \cap S^-)$ é um espaço vectorial de dimensão 2, admitindo uma base formada pelas classes de equivalência $[f_d]$ e $[f_e]$.

a) Verificar para que escalares $a, b \in \mathbb{K}$ a classe $a[f_d] + b[f_e] \in H^0(S^+ \cap S^-)$ pertence à imagem da aplicação linear $H^0(\mu^\bullet)$.

b) Sendo Vol o elemento de volume de S^1 , verificar que $\partial^0([f_d]) = \frac{1}{2\pi}[Vol]$ e $\partial^0([f_e]) = -\frac{1}{2\pi}[Vol]$.

Sugestão: A conclusão de a) é simples e, tendo em conta esta e a exactidão da sucessão, é fácil de ver que, de b), basta provar que $\partial^0([f_d]) = \frac{1}{2\pi}[Vol]$.

Proceder então do seguinte modo:

1) Considerar a aplicação $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, definida por $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$ e verificar que as restrições de φ são difeomorfismos $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow S^-$ e $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\rightarrow S^+$.

2) Por um argumento de partição da unidade, mostrar a existência de uma aplicação suave $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$, nula fora de uma parte de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ fechada em \mathbb{R} e tal que $\int_{\mathbb{R}} \alpha(t) dt = 1$.

3) Verificar que $f_d = \mu^0(g, h)$, onde $g: S^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: S^- \rightarrow \mathbb{R}$ estão definidas por

$$g(\varphi(t)) = -1 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^t \alpha(u) du, \quad h(\varphi(s)) = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^s \alpha(u) du,$$

para cada $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ e $s \in]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

4) Verificar que existe $\omega \in \Omega^1(S^1)$ tal que $\omega(\varphi(t)) = \alpha(t) Vol_{\varphi(t)}$, para cada $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $\omega_{(x,y)} = 0$, nos restantes pontos de S^1 e que ω coincide com dg em S^+ e com dh em S^- .

5) Lembrar que $f: H^1(S^1) \rightarrow \mathbb{K}$ é um isomorfismo.

Ex IV.14 Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ duas variedades, a segunda das quais suavemente contráctil. Sejam $\pi_1: M \times M' \rightarrow M$ a projecção no primeiro factor e, para cada $y \in M'$, $\sigma_y: M \rightarrow M \times M'$ a aplicação suave definida por $\sigma_y(x) = (x, y)$. Mostrar que, para cada p , $H^p(\pi_1): H^p(M) \rightarrow H^p(M \times M')$ é um isomorfismo, tendo como inverso $H^p(\sigma_y): H^p(M \times M') \rightarrow H^p(M)$. Deduzir, em particular, que a aplicação linear $H^p(\sigma_y)$ não depende da escolha de y . **Sugestão:** Verificar que $\pi_1 \circ \sigma_y = Id_M$ e que $\sigma_y \circ \pi_1$ é suavemente homotópico a $Id_{M \times M'}$, neste último caso utilizando IV.1.14.

Ex IV.15 Nas notações do exercício IV.13, consideremos $\mathbb{T} = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$, que é portanto uma variedade compacta, sem bordo, de dimensão 2, sobre a qual consideramos a orientação produto (cf. II.7.25), que se verifica facilmente ser suave.⁷⁶ Verificar que:

⁷⁶A \mathbb{T} costuma-se dar o nome de *toro* (de dimensão 2).

- a) $H^0(\mathbb{T})$ é um espaço vectorial de dimensão 1, admitindo como base a classe de equivalência da aplicação $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ de valor constante 1.
- b) $H^1(\mathbb{T})$ é um espaço vectorial de dimensão 2.
- c) $H^2(\mathbb{T})$ é um espaço vectorial de dimensão 1, admitindo uma base formada pela classe de equivalência do elemento de volume de \mathbb{T} , e a aplicação linear $f: H^2(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{K}$ é um isomorfismo.
- d) $H^p(\mathbb{T}) = \{0\}$, para os restantes valores de p .

Sugestão: A alínea a) resulta de \mathbb{T} ser conexo e, da alínea c), basta mostrar que $H^2(\mathbb{T})$ tem dimensão 1. Nas notações do exercício IV.13, considerar os abertos $\mathbb{T}^+ = S^1 \times S^+$ e $\mathbb{T}^- = S^1 \times S^-$ de \mathbb{T} , com união \mathbb{T} e reparar que o exercício IV.14 permite calcular a dimensão dos espaços vectoriais $H^p(\mathbb{T}^+)$, $H^p(\mathbb{T}^-)$ e $H^p(\mathbb{T}^+ \cap \mathbb{T}^-)$, este último por ser isomorfo ao espaço $H^p(S^1 \times S_d) \times H^p(S^1 \times S_e)$. Considerar a porção seguinte de sucessão exacta de Mayer-Vietoris (já na versão referida no exercício IV.12)

$$\begin{aligned} \{0\} \rightarrow H^0(\mathbb{T}) \rightarrow H^0(\mathbb{T}^+) \times H^0(\mathbb{T}^-) \rightarrow H^0(\mathbb{T}^+ \cap \mathbb{T}^-) \rightarrow H^1(\mathbb{T}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(\mathbb{T}^+) \times H^1(\mathbb{T}^-) \rightarrow H^1(\mathbb{T}^+ \cap \mathbb{T}^-) \rightarrow H^2(\mathbb{T}) \rightarrow \{0\}, \end{aligned}$$

a qual tem dois termos de dimensões ainda não conhecidas pelo que, por si só, não determina essas dimensões. Estas ficam, no entanto determinadas, se, por um estudo mais aprofundado da aplicação linear entre espaços vectoriais de dimensão 2, $H^1(\mathbb{T}^+) \times H^1(\mathbb{T}^-) \rightarrow H^1(\mathbb{T}^+ \cap \mathbb{T}^-)$, se concluir que esta aplicação linear tem um núcleo com dimensão 1. Nesse estudo atender ao exercício anterior que garante que, se ω é o elemento de volume de S^1 , para cada variedade suavemente contráctil M' , com projecção $\rho: S^1 \times M' \rightarrow S^1$, $[\rho^*\omega]$ constitui uma base de $H^1(S^1 \times M')$.

Ex IV.16 Continuemos a considerar a variedade $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, com a orientação usual, e, para simplificar as notações, identifiquemos, do modo usual, \mathbb{R}^2 a \mathbb{C} . Consideremos, como no exercício precedente, o toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. O objectivo deste exercício é a obtenção de uma informação mais completa sobre o espaço de cohomologia $H^1(\mathbb{T})$. Notemos $\pi_1, \pi_2: \mathbb{T} \rightarrow S^1$ as projecções, definidas por $\pi_1(x, y) = x$ e $\pi_2(x, y) = y$, e $\sigma_1, \sigma_2: S^1 \rightarrow \mathbb{T}$ as “injecções”, definidas por $\sigma_1(x) = (x, 1)$ e $\sigma_2(y) = (1, y)$. Notemos $Vol \in \Omega^1(S^1)$ a forma diferencial elemento de volume de S^1 .

- a) Verificar que se pode definir uma aplicação linear $\xi: H^1(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\xi([\omega]) = \left(\int_{S^1} \sigma_1^* \omega, \int_{S^1} \sigma_2^* \omega \right).$$

- b) Verificar que a aplicação linear $\xi: H^1(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo, que as formas diferenciais $\omega_1 = \pi_1^*(Vol)$ e $\omega_2 = \pi_2^*(Vol)$, pertencentes a $\Omega^1(\mathbb{T})$, são fechadas e que as classes de equivalência $[\omega_1]$ e $[\omega_2]$ constituem uma base do espaço vectorial $H^1(\mathbb{T})$, de dimensão 2.

Sugestão: Verificar que $\xi([\omega_1]) = (2\pi, 0)$ e que $\xi([\omega_2]) = (0, 2\pi)$.

Ex IV.17 Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ variedades e $f: M' \rightarrow M$ uma aplicação própria.

a) Mostrar que f é uma *aplicação fechada*, isto é, que, para cada conjunto fechado $A \subset M'$, o conjunto $f(A) \subset M$ é também fechado. **Sugestão:** Ter em conta o facto de cada ponto b de M possuir uma vizinhança compacta V e reparar que, se b é aderente a $f(A)$, então b é também aderente ao conjunto

$$V \cap f(A) = f(f^{-1}(V) \cap A).$$

b) Mostrar que, se a aplicação f é injectiva, então é um homeomorfismo de M' sobre um subconjunto fechado de M .

c) Deduzir, em particular, que, se M' é uma subvariedade de M , então a inclusão $M' \rightarrow M$ é própria se, e só se, M' é fechada em M .

Ex IV.18 Sejam E e E' dois espaços vectoriais de dimensão finita e $f: E' \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Mostrar que a aplicação f é própria se, e só se, $\|f(x)\| \rightarrow +\infty$ quando $\|x\| \rightarrow +\infty$, ou seja, mais precisamente, se, para cada $R > 0$, existe $r > 0$ tal que, sempre que $\|x\| > r$, tem-se $\|f(x)\| > R$.

Ex IV.19 Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ duas variedades. Se $f, g: M' \rightarrow M$ são duas aplicações suaves próprias, diz-se que f e g são *suave e propriamente homotópicas* se existir uma aplicação suave própria $H: [0, 1] \times M' \rightarrow M$ tal que, para cada $x \in M'$,

$$H(0, x) = f(x), \quad H(1, x) = g(x).$$

Diz-se então que H é uma *homotopia suave própria* de f para g (comparar com III.7.5).

Mostrar que, quando $f, g: M' \rightarrow M$ são suave e propriamente homotópicas, tem-se, para cada p , $H_c^p(f) = H_c^p(g): H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(M')$.

Sugestão: Começar por verificar que, se $p \geq 1$ e $\omega = (\omega_{(t,x)})_{(t,x) \in [0,1] \times M'}$ é uma forma diferencial suave de grau p sobre $[0, 1] \times M'$, nula fora dum compacto $\widehat{K} \subset [0, 1] \times M'$, então a forma diferencial suave de grau $p - 1$ sobre M' $P\omega = (P\omega_x)_{x \in M'}$, definida em III.7.2, é nula fora do compacto $\pi_2(\widehat{K}) \subset M'$. Verificar então que, nas condições de III.7.6, quando a forma diferencial suave, fechada, de grau $p \geq 1$ sobre M , $\omega = (\omega_y)_{y \in M}$ for nula fora de um certo compacto contido em M , a forma diferencial suave de grau $p - 1$, $\sigma = (\sigma_x)_{x \in M}$, sobre M' , construída na respectiva demonstração, é nula fora de um certo compacto contido em M' .

Ex IV.20 Viu-se, nas diferentes alíneas do exercício II.27, que, dado um diagrama comutativo do tipo

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \rightarrow & E & \xrightarrow{\lambda} & F & \xrightarrow{\mu} & G & \rightarrow & \{0\} \\ & & \downarrow \rho & & \downarrow \sigma & & \downarrow \tau & & \\ \{0\} & \rightarrow & E' & \xrightarrow{\lambda'} & F' & \xrightarrow{\mu'} & G' & \rightarrow & \{0\} \end{array},$$

com as duas linhas exactas, se duas das três aplicações lineares ρ , σ e τ

forem isomorfismos, então o mesmo acontece à terceira. Mostrar que este resultado pode ser obtido como consequência imediata do lema dos cinco (IV.5.14).

Ex IV.21 Sejam E um espaço euclidiano e $B \subset E$ a bola aberta de centro 0 e raio 1 de E , $B = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$. Mostrar que B é difeomorfa a E e, mais precisamente, que tem lugar um difeomorfismo $f: B \rightarrow E$, definido por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}},$$

cujo inverso $g: E \rightarrow B$ está definido por

$$g(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}.$$

Ex IV.22 (**O grau de uma aplicação própria**) Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ variedades sem bordo, de dimensão m , suavemente orientadas, e suponhamos que M é conexa e não vazia.

a) Seja $f: M' \rightarrow M$ uma aplicação suave própria. Mostrar que existe um, e um só, $c \in \mathbb{R}$ tal que, qualquer que seja $\omega \in \Omega_c^m(M; \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}),

$$\int_{M'} f^* \omega = c \int_M \omega.$$

Diz-se então que c é o grau da aplicação suave ω e nota-se $c = \deg(f)$.

Sugestão: Lembrar que têm lugar aplicações lineares, definidas a partir do integral, $f: H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$, $f: H_c^m(M') \rightarrow \mathbb{K}$ e que, por IV.5.26, a primeira é um isomorfismo, pelo que, à aplicação linear $H_c^m(f): H_c^m(M) \rightarrow H_c^m(M')$, fica associada uma aplicação linear $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, pela condição de fazer comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_c^m(M) & \xrightarrow{H_c^m(f)} & H_c^m(M') \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ \mathbb{K} & \rightarrow & \mathbb{K} \end{array} .$$

b) Nas condições anteriores, suponhamos que $y_0 \in M$ é um valor regular da aplicação suave f (cf. I.5.1). Mostrar que $f^{-1}(\{y_0\})$ é um conjunto finito, eventualmente vazio, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e notar, para cada $1 \leq i \leq n$, $\varepsilon_i = 1$ ou $\varepsilon_i = -1$, conforme o isomorfismo $Df_{x_i}: T_{x_i}(M') \rightarrow T_{y_0}(M)$ conserve, ou inverta as orientações. Mostrar que se pode escolher, para cada $1 \leq i \leq n$, um aberto \hat{U}_i de M' , com $x_i \in \hat{U}_i$, tal que a restrição de f seja um difeomorfismo de \hat{U}_i sobre um aberto V_i de M , que conserve, ou inverta, as orientações e que os abertos \hat{U}_i sejam disjuntos dois a dois. **Sugestão:** Reparar que $f^{-1}(\{y_0\})$ é uma variedade compacta de dimensão 0.

c) Na continuação de b), mostrar que se pode escolher um aberto V de M , com $y_0 \in V$, e, para cada $1 \leq i \leq n$, um aberto U_i de M' , com

$x_i \in U_i \subset \widehat{U}_i$, de modo que se tenha $f(U_i) = V$ e $f^{-1}(V) = \bigcup U_i$.
Sugestão: Lembrando que f é uma aplicação fechada, pela alínea a) do exercício IV.17, deduzir que $f(M \setminus \bigcup \widehat{U}_i)$ é um fechado de M que não contém y_0 .

d) Nas condições de b), mostrar que se tem

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i,$$

em particular $\deg(f) \in \mathbb{Z}$. **Sugestão:** Nas condições de c), utilizar o teorema da partição da unidade para garantir a existência de uma aplicação suave $\varphi: M \rightarrow [0, 1]$, nula fora de uma parte compacta de V e tal que $\varphi(y_0) = 1$ e, sendo então $\omega \in \Omega_c^m(M)$, $\omega_y = \varphi(y) \text{Vol}_{T_y(M)}$, mostrar que $\int_M \omega > 0$ e calcular $\int_{M'} f^* \omega$.

e) Deduzir das alíneas anteriores e do teorema de Sard que, qualquer que seja a aplicação suave própria $f: M' \rightarrow M$, tem-se $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ e que, se f não é sobrejectiva, tem-se mesmo $\deg(f) = 0$.

f) Mostrar que, se $f: M' \rightarrow M$ é um difeomorfismo, então $\deg(f) = \pm 1$.

Ex IV.23 (Outra vez o teorema fundamental da Álgebra)

a) Sendo $n \geq 1$, mostrar que tem lugar uma aplicação suave própria $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f_n(z) = z^n$, para a qual se tem $\deg(f_n) = n$.

Sugestão: Verificar que cada $z \neq 0$ é um ponto regular de f_n , e com o isomorfismo $Df_{nz}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a conservar as orientações.

b) Sejam $n \geq 1$ e, para cada $0 \leq i \leq n-1$, $a_i \in \mathbb{C}$ e consideremos a correspondente aplicação polinomial $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0.$$

Mostrar que f é uma aplicação suave própria e que f é suave e propriamente homotópica à aplicação $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ referida em a) pela homotopia $H: [0, 1] \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$H(t, z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0),$$

e deduzir que se tem $\deg(f) = n$.

c) Concluir de b) que a aplicação $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é sobrejectiva e, em particular, que existe z tal que $f(z) = 0$.

Ex IV.24 Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, de dimensão m , suavemente contráctil e suavemente orientada. Mostrar que se tem $H_c^p(M) = \{0\}$, para cada $p \neq 0$, e que $H_c^m(M)$ é um espaço vectorial de dimensão 1 (generalização de IV.4.11)⁷⁷. **Sugestão:** Utilizar o teorema de dualidade de Poincaré, lembrando IV.1.13.

⁷⁷Pode-se provar que, se M é uma variedade suavemente contráctil, então o fibrado tangente $T(M)$ é trivial, em particular admite uma orientação suave (cf., por exemplo, o

Ex IV.25 (**Um lema de Álgebra Linear**) Sejam E e F espaços vectoriais sobre \mathbb{K} e $\mathbb{K}' \supset \mathbb{K}$. Sejam $\lambda: E \rightarrow F$ uma aplicação linear e $\lambda^*: L(F; \mathbb{K}') \rightarrow L(E; \mathbb{K}')$ a respectiva dual. Mostrar que λ^* é injectiva se, e só se, λ é sobrejectiva e que λ^* é sobrejectiva se, e só se, λ é injectiva. **Sugestão:** Aplicar IV.5.18 às sucessões exactas

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \rightarrow & \ker(\lambda) & \rightarrow & E & \xrightarrow{\lambda} & F \\ & & & & E & \xrightarrow{\lambda} & F \\ & & & & & & \downarrow \lambda(E) \\ & & & & & & \{0\} \end{array}$$

(embora uma demonstração directa seja também possível).

Ex IV.26 Sejam $M \subset E$ e $M' \subset E'$ variedades sem bordo, suavemente orientadas, com dimensões m e p , respectivamente, a segunda das quais suavemente contráctil. Sejam $\pi_1: M \times M' \rightarrow M$ e $\pi_2: M \times M' \rightarrow M'$ as projecções canónicas. Lembrando que, pelo exercício IV.24, $H_c^p(M')$ é um espaço vectorial de dimensão 1, e portanto que a aplicação linear sobrejectiva $f: H_c^p(M') \rightarrow \mathbb{K}$ é um isomorfismo, podemos fixar $[\rho] \in H_c^p(M')$ tal que $f([\rho]) = 1$. Consideremos sobre $M \times M'$ a orientação, que se verifica facilmente ser suave, correspondente a munir cada um dos espaços vectoriais $T_{(x,y)}(M \times M') = T_x(M) \times T_y(M')$ da orientação produto (cf. II.7.25).

a) Utilizar o teorema de dualidade de Poincaré e a conclusão do exercício IV.14 para deduzir que se tem $H_c^k(M \times M') = \{0\}$, para cada $k < p$.

b) Mostrar que, para cada $k \geq 0$, tem lugar uma aplicação linear

$$\lambda^k: H_c^k(M) \rightarrow H_c^{p+k}(M \times M'),$$

definida por

$$\lambda^k([\omega]) = [\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \rho].$$

c) Mostrar que a aplicação linear $\lambda^m: H_c^m(M) \rightarrow H_c^{p+m}(M \times M')$ verifica a condição de se ter $f(\lambda^m([\omega])) = f([\omega])$, para cada $[\omega] \in H_c^m(M)$.

Sugestão: Dadas as bases u_1, \dots, u_m de $T_x(M)$ e v_1, \dots, v_p de $T_y(M')$, utilizar a caracterização do produto exterior em II.5.12 para mostrar que

$$\begin{aligned} (\pi_1^* \omega \wedge \pi_2^* \rho)_{(x,y)}(u_1, 0, \dots, u_m, 0, (0, v_1), \dots, (0, v_p)) &= \\ = \omega_x(u_1, \dots, u_m) \rho_y(v_1, \dots, v_p). \end{aligned}$$

d) Mostrar que, para cada $0 \leq k \leq m$, a aplicação linear

$$\lambda^k: H_c^k(M) \rightarrow H_c^{p+k}(M \times M')$$

é um isomorfismo. **Sugestão:** Considerando o isomorfismo

exercício 5.4 de [10]). A condição de M estar suavemente orientada poderia portanto não ser exigida expressamente.

$$H^{m-k}(\pi_1): H^{m-k}(M) \rightarrow H^{m-k}(M \times M')$$

(cf. o exercício IV.14) e as aplicações bilineares de Poincaré

$$\begin{aligned} \xi^{m-k}: H^{m-k}(M) \times H_c^k(M) &\rightarrow \mathbb{K} \\ \xi^{m-k}: H^{m-k}(M \times M') \times H_c^{p+k}(M \times M') &\rightarrow \mathbb{K}, \end{aligned}$$

mostrar que, para cada $\sigma \in H^{m-k}(M)$ e $\omega \in H_c^k(M)$, tem-se

$$\xi^{m-k}(H^{m-k}(\pi_1)([\sigma]), \lambda^k([\omega])) = \xi^{m-k}([\sigma], [\omega])$$

e deduzir daqui, e do teorema de dualidade de Poincaré que

$$\lambda^{k*}: L(H_c^{p+k}(M \times M'); \mathbb{K}) \rightarrow L(H_c^k(M); \mathbb{K})$$

é um isomorfismo, aplicando, em seguida, o exercício IV.25.

e) Reparar que as alíneas a) e d) implicam que, para todo o $k \in \mathbb{Z}$, os espaços vectoriais $H_c^k(M)$ e $H_c^{p+k}(M \times M')$ são isomorfos.

Ex IV.27 a) Seja E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 2$. Mostrar que $H_c^p(E \setminus \{0\}) = \{0\}$, para cada p distinto de 1 e n e que $H_c^1(E \setminus \{0\})$ e $H_c^n(E \setminus \{0\})$ são espaços vectoriais de dimensão 1. Mais precisamente, sendo $\varphi:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ uma aplicação suave, de suporte compacto, tal que $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$, mostrar que tem lugar uma forma diferencial fechada $\rho \in \Omega_c^1(E \setminus \{0\})$, definida por

$$\rho_x(w) = \varphi(\|x\|) \frac{\langle x, w \rangle}{\|x\|},$$

e que $[\rho]$ constitui uma base de $H_c^1(E \setminus \{0\})$. **Sugestão:** Considerar o difeomorfismo $f: E \setminus \{0\} \rightarrow S \times]0, +\infty[$, definido por

$$f(x) = \left(\frac{x}{\|x\|}, \|x\| \right),$$

e atender ao isomorfismo descrito no exercício IV.24.

b) O que se poderá dizer sobre os espaços de cohomologia com suporte compacto de $E \setminus \{0\}$, no caso em que E é um espaço euclidiano de dimensão 1?

Ex IV.28 Seja $M \subset E$ uma variedade sem bordo, de dimensão m , suavemente orientada e seja $A \subset M$ uma variedade fechada, sem bordo, de dimensão p , também suavemente orientada. Mostrar que existe então um, e um só, $[\omega] \in H^{m-p}(M)$ tal que, qualquer que seja $[\rho] \in H_c^p(M)$,

$$\int_A \rho_{/A} = \int_M \omega \wedge \rho$$

(diz-se então que $[\omega]$ é o *dual de Poincaré* da variedade orientada A).

Sugestão: Utilizar o teorema de dualidade de Poincaré.

Ex IV.29 Coloquemo-nos nas notações do exercício IV.16, em que verificámos que, considerando em $S^1 \subset \mathbb{C}$ a orientação usual, para a variedade $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$, o espaço de cohomologia $H^1(\mathbb{T})$ tem dimensão 2 e admite como base $[\omega_1], [\omega_2]$, onde $\omega_j = \pi_j^*(Vol_{S^1})$ e $\pi_1, \pi_2: \mathbb{T} \rightarrow S^1$ são as projecções canónicas. Consideremos em \mathbb{T} a orientação produto usual e consideremos as subvariedades compactas de dimensão 1, $A_1 = S^1 \times \{1\}$ e $A_2 = \{1\} \times S^1$, em ambos os casos com a orientação produto usual (na variedade $\{1\}$, de dimensão 0, consideramos, naturalmente, a orientação canónica). Verificar que os duais de Poincaré das variedades compactas A_1 e A_2 , são, respectivamente, os elementos $-\frac{1}{2\pi} [\omega_2]$ e $\frac{1}{2\pi} [\omega_1]$ de $H^1(\mathbb{T})$.

Ex IV.30 Seja E um espaço euclidiano orientado de dimensão $n \geq 2$ e lembremos que, pelo exercício IV.27, $H_c^1(E \setminus \{0\})$ é um espaço vectorial de dimensão 1, admitindo uma base $[\rho]$, onde $\rho \in \Omega_c^1(E \setminus \{0\})$ é uma forma diferencial fechada verificando

$$\rho_x(w) = \varphi(\|x\|) \frac{\langle x, w \rangle}{\|x\|},$$

para uma certa aplicação suave de suporte compacto $\varphi:]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, verificando $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$. Seja $\Omega \in \Omega^{n-1}(E \setminus \{0\})$ a forma diferencial ângulo sólido orientado, isto é, a definida por $\Omega = f^*(Vol_{S^{n-1}})$, onde $f: E \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ é a aplicação suave definida por $f(x) = x/\|x\|$ (cf. III.9.16), a qual, pela alínea b) do exercício III.49, verifica

$$\Omega_x(u_1, \dots, u_{n-1}) = \frac{1}{\|x\|^n} Vol_E(x, u_1, \dots, u_{n-1}).$$

a) Verificar que $H^{n-1}(E \setminus \{0\})$ é um espaço vectorial de dimensão 1, que a forma diferencial Ω é fechada e que $[\omega]$ é uma base de $H^{n-1}(E \setminus \{0\})$.

Sugestão: Reduzir o resultado a IV.3.13, usando um isomorfismo isométrico entre \mathbb{R}^n e E , que conserve as orientações.

b) Mostrar que $\rho \wedge \Omega \in \Omega_c^n(E \setminus \{0\})$ verifica

$$(\rho \wedge \Omega)_x = \varphi(\|x\|) \frac{1}{\|x\|^{n-1}} Vol_E$$

e deduzir que

$$\int_{E \setminus \{0\}} \rho \wedge \Omega = \mu(S^{n-1}).$$

Sugestão: Para cada $x \in E \setminus \{0\}$, considerar uma base ortonormada directa u_1, \dots, u_{n-1} de $T_{x/\|x\|}(S^{n-1})$ (com a orientação que vem de olhar para S^{n-1} como o bordo da bola fechada) e utilizar a base ortonormada directa de E , $\frac{x}{\|x\|}, u_1, \dots, u_{n-1}$, para calcular a componente de $(\rho \wedge \Omega)_x$ no elemento de volume de E .

c) Fixado $x_0 \in S^{n-1}$, mostrar que o conjunto A dos pontos da forma tx_0 , com $t \in]0, +\infty[$, é fechado em $E \setminus \{0\}$ e é uma variedade de dimensão 1, naturalmente difeomorfa a $]0, +\infty[$. Considerando em A a orientação suave para a qual o referido difeomorfismo conserva as orientações, mostrar que se tem

$$\int_A \rho_{/A} = 1$$

e deduzir que o dual de Poincaré da variedade A é

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{\mu(S^{n-1})} [\Omega] \in H^{n-1}(E \setminus \{0\}).$$

d) Verificar que o dual de Poincaré da variedade orientada de dimensão $n - 1$, $S^{n-1} \subset E \setminus \{0\}$, é 0. **Sugestão:** Reparar que o único caso não trivial é aquele em que $n = 2$.

Ex IV.31 (**Um lema de Álgebra Linear**) Seja E um espaço vectorial sobre \mathbb{K} , de dimensão finita n , e seja $\xi: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação bilinear alternada não degenerada, isto é, tal que, para cada $x \in E \setminus \{0\}$, exista $y \in E$ tal que $\xi(x, y) \neq 0$.

a) Mostrar que ξ define cada um dos espaços como dual do outro.⁷⁸

b) Diz-se que um subespaço vectorial $F \subset E$ é não degenerado se a restrição de ξ a $F \times F$ for ainda não degenerada. Mostrar que, se $x, y \in E$ são tais que $\xi(x, y) \neq 0$, então o subespaço vectorial F gerado por x e y tem dimensão 2 e é não degenerado.

c) Se $F \subset E$ é um subespaço vectorial de dimensão k , define-se o seu *ortogonal* (relativamente a ξ) como sendo o conjunto F^\perp dos $x \in E$ tais que $\xi(x, y) = 0$, para todo o $y \in F$. Mostrar que F^\perp é um subespaço vectorial de dimensão $n - k$ e que $(F^\perp)^\perp = F$. **Sugestão:** Mostrar que, por composição do isomorfismo $\Phi: E \rightarrow L(E; \mathbb{K})$, associado a ξ , com a operação de restrição, se obtém uma aplicação linear sobrejectiva $E \rightarrow L(F; \mathbb{K})$, cujo kernel é F^\perp e reparar que se tem trivialmente $F \subset (F^\perp)^\perp$.

d) Mostrar que um subespaço vectorial F é não degenerado se, e só se, $F \cap F^\perp = \{0\}$ e deduzir que, se F é não degenerado, então F^\perp é também não degenerado.

e) Deduzir de b), c) e d) que, se $n \neq 0$, então $n \geq 2$ e E admite um subespaço vectorial não degenerado de dimensão $n - 2$ e concluir que n tem que ser par.

Ex IV.32 Seja $M \subset E$ uma variedade compacta, sem bordo, suavemente orientada, com dimensão $n = 2p$, com p ímpar. Mostrar que o espaço vectorial $H^p(M)$ tem dimensão par. **Sugestão:** Verificar que a aplicação de Poincaré

⁷⁸É claro que, reciprocamente, toda a aplicação bilinear alternada que defina um dos espaços como dual do outro, é não degenerada, no sentido anterior.

$\xi^p: H^p(M) \times H^p(M) \rightarrow \mathbb{K}$ está nas condições do exercício IV.31, tendo em conta o teorema de dualidade de Poincaré.

Ex IV.33 É fácil, utilizando IV.1.4 ou IV.2.6, apresentar exemplos de variedades não conexas com um espaço de cohomologia de de Rham de dimensão infinita. O objectivo deste exercício é o de dar um exemplo de uma variedade conexa com um espaço de cohomologia de de Rham de dimensão infinita.

Para cada $p \in \mathbb{Z}$, notemos $x_p = (2p, 0) \in \mathbb{R}^2$. Seja $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$.

a) Mostrar que M é um aberto conexo de \mathbb{R}^2 , em particular uma variedade conexa de dimensão 2. **Sugestão:** M é a união de dois conjuntos de intersecção não vazia, que estão contidos na aderência de abertos convexos.

b) Seja $S \subset \mathbb{R}^2$, $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$, com a orientação que lhe vem de ser bordo de $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$. Para cada $p \in \mathbb{Z}$, seja $f_p: M \rightarrow S$ a aplicação suave definida por

$$f_p(x) = \frac{x - x_p}{\|x - x_p\|}$$

e seja $\omega_p \in \Omega^1(M)$ a forma diferencial $\omega_p = f_p^* Vol_S$. Mostrar que se tem $d\omega_p = 0$, o que nos permitirá considerar os elementos $[\omega_p] \in H^1(M)$.

c) Para cada $p \in \mathbb{Z}$, seja $S_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_p\| = 1\}$, com a orientação que lhe vem de ser bordo de $B_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_p\| \leq 1\}$. Mostrar que se tem $\int_{S_p} \omega_p = 2\pi$ e, utilizando o teorema de Stokes, que $\int_{S_p} \omega_q = 0$, para cada $q \neq p$, e deduzir daqui que os elementos $[\omega_p] \in H^1(M)$ são linearmente independentes, e portanto que $H^1(M)$ tem dimensão infinita.

Ex IV.34 (**Generalidades sobre a complexificação**) Sejam E um espaço vectorial real, $E_{\mathbb{C}}$ um espaço vectorial complexo e $\xi: E \times E \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ um isomorfismo real. Vamos dizer que ξ define $E_{\mathbb{C}}$ como *complexificado* de E , ou que $E_{\mathbb{C}}$ é um complexificado de E definido por ξ , se se tem $\xi(0, x) = i\xi(x, 0)$, para cada $x \in E$.

a) (Existência) Mostrar que, se E é um espaço vectorial real, então existe sobre $E \times E$ uma estrutura de espaço vectorial complexo definida pela estrutura complexa $J: E \times E \rightarrow E \times E$, $J(x, y) = (-y, x)$, (cf. II.1.4) e que $E \times E$ é então um complexificado de E , definido pelo isomorfismo identidade. Mostrar ainda, utilizando II.1.6, que, se $E_{\mathbb{C}}$ é um complexificado de E , definido pelo isomorfismo $\xi: E \times E \rightarrow E_{\mathbb{C}}$, então ξ é mesmo um isomorfismo complexo, quando se considera em $E \times E$ a estrutura de espaço vectorial complexo atrás referida.

b) Sejam E e F espaços vectoriais reais e $\lambda: E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Sejam $E_{\mathbb{C}}$ e $F_{\mathbb{C}}$ complexificados de E e F , definidos pelos isomorfismos $\xi: E \times E \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ e $\eta: F \times F \rightarrow F_{\mathbb{C}}$. Mostrar que tem então lugar uma aplicação linear complexa $\lambda_{\mathbb{C}}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow F_{\mathbb{C}}$ (a *complexificada* de λ) definida pela condição de tornar comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\lambda \times \lambda} & F \times F \\ \downarrow \xi & & \downarrow \eta \\ E_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\lambda_{\mathbb{C}}} & F_{\mathbb{C}} \end{array} .$$

Verificar e precisar as propriedades de functorialidade que garantem que $(Id_E)_{\mathbb{C}} = Id_{E_{\mathbb{C}}}$ e que $(\mu \circ \lambda)_{\mathbb{C}} = \mu_{\mathbb{C}} \circ \lambda_{\mathbb{C}}$, deduzindo, em particular, que, se $\lambda: E \rightarrow F$ é um isomorfismo, então $\lambda_{\mathbb{C}}: E_{\mathbb{C}} \rightarrow F_{\mathbb{C}}$ é também um isomorfismo e $(\lambda_{\mathbb{C}})^{-1} = (\lambda^{-1})_{\mathbb{C}}$.

c) (Unicidade) Demonstrar e precisar a afirmação de que, se $E_{\mathbb{C}}$ e $E'_{\mathbb{C}}$ são dois complexificados de E , então existe um isomorfismo complexo, naturalmente definido, de $E_{\mathbb{C}}$ sobre $E'_{\mathbb{C}}$.

d) Suponhamos que $E_{\mathbb{C}}$ é um complexificado de E , definido pelo isomorfismo $\xi: E \times E \rightarrow E_{\mathbb{C}}$. Seja $(x_j)_{j \in J}$ uma família de vectores de E . Mostrar que esta família é linearmente independente (resp. geradora, resp. uma base de E) se, e só se a família $(\xi(x_j, 0))_{j \in J}$ de vectores de $E_{\mathbb{C}}$ for linearmente independente (resp. geradora, resp. uma base de $E_{\mathbb{C}}$). Deduzir, em particular, que a dimensão, finita ou infinita, de $E_{\mathbb{C}}$, enquanto espaço vectorial complexo, é igual à dimensão de E , enquanto espaço vectorial real.

Sugestão: Mostrar que, para $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\sum_j (a_j + ib_j) \xi(x_j, 0) = \xi\left(\sum_j a_j x_j, \sum_j b_j x_j\right).$$

Ex IV.35 (Complexificação de complexos de cocadeias) Consideremos um complexo de cocadeias real C^{\bullet} , definido pelos espaços vectoriais reais C^p e pelos operadores de cobordo $d^p: C^p \rightarrow C^{p+1}$. Seja, para cada p , $C_{\mathbb{C}}^p$ um complexificado de C^p , definido pelo isomorfismo $\xi^p: C^p \times C^p \rightarrow C_{\mathbb{C}}^p$, e consideremos as aplicações lineares complexificadas $d_{\mathbb{C}}^p: C_{\mathbb{C}}^p \rightarrow C_{\mathbb{C}}^{p+1}$ correspondentes.

a) Mostrar que se tem então um complexo de cocadeias complexo $C_{\mathbb{C}}^{\bullet}$, definido pelos $C_{\mathbb{C}}^p$ e pelos operadores de cobordo $d_{\mathbb{C}}^p: C_{\mathbb{C}}^p \rightarrow C_{\mathbb{C}}^{p+1}$.

b) Verificar que, considerando o complexo de cocadeis produto $C^{\bullet} \times C^{\bullet}$, definido pelos $C^p \times C^p$ e pelos operadores de cobordo $d^p \times d^p$ (cf. IV.2.4), a família ξ^{\bullet} dos $\xi^p: C^p \times C^p \rightarrow C_{\mathbb{C}}^p$ é um isomorfismo de complexos de cocadeias reais, ao qual fica portanto associado, para cada p , um isomorfismo

$$H^p(\xi^{\bullet}): H^p(C^{\bullet} \times C^{\bullet}) \rightarrow H^p(C_{\mathbb{C}}^{\bullet}).$$

c) Lembrando que, por IV.2.5, $H^p(C^{\bullet} \times C^{\bullet})$ é um produto de $H^p(C^{\bullet})$ e $H^p(C^{\bullet})$, com as projecções $H^p(C^{\bullet} \times C^{\bullet}) \rightarrow H^p(C^{\bullet})$ definidas respectivamente por $[(x, y)] \mapsto [x]$ e $[(x, y)] \mapsto [y]$, deduzir que tem lugar um isomorfismo real

$$\widehat{\xi}^p: H^p(C^{\bullet}) \times H^p(C^{\bullet}) \rightarrow H^p(C_{\mathbb{C}}^{\bullet}),$$

que a cada par $([x], [y])$ associa $H^p(\xi^\bullet)([(x, y)])$, e mostrar que este isomorfismo define $H^p(C_\bullet^\mathbb{C})$ como complexificado de $H^p(C^\bullet)$.

Ex IV.36 (Mudança de escalares na cohomologia)

a) Seja F um espaço vectorial real. Mostrar que, para cada $p \geq 0$, $A^p(F; \mathbb{C})$ é um complexificado de $A^p(F; \mathbb{R})$, definido pelo isomorfismo

$$\xi^p: A^p(F; \mathbb{R}) \times A^p(F; \mathbb{R}) \rightarrow A^p(F; \mathbb{C}),$$

$$\xi^p(\omega, \rho) = \omega + i\rho.$$

b) Seja $M \subset E$ uma variedade. Mostrar que, para cada $p \in \mathbb{Z}$, $\Omega^p(M; \mathbb{C})$ é um complexificado de $\Omega^p(M; \mathbb{R})$, definido pelo isomorfismo

$$\xi^p: \Omega^p(M; \mathbb{R}) \times \Omega^p(M; \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^p(M; \mathbb{C}),$$

$\xi^p(\omega, \rho) = \omega + i\rho$, e $\Omega_c^p(M; \mathbb{C})$ é um complexificado de $\Omega_c^p(M; \mathbb{R})$, definido pelo isomorfismo

$$\xi^p: \Omega_c^p(M; \mathbb{R}) \times \Omega_c^p(M; \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_c^p(M; \mathbb{C}),$$

definido pela mesma fórmula.

c) Deduzir de b) que, se $M \subset E$ é uma variedade, então, para cada p , $H^p(M; \mathbb{C})$ é um complexificado de $H^p(M; \mathbb{R})$ e $H_c^p(M; \mathbb{C})$ é um complexificado de $H_c^p(M; \mathbb{R})$, em particular, a dimensão de $H^p(M; \mathbb{C})$, como espaço vectorial complexo, coincide com a dimensão de $H^p(M; \mathbb{R})$, como espaço vectorial real e a dimensão de $H_c^p(M; \mathbb{C})$, como espaço vectorial complexo, coincide com a dimensão de $H_c^p(M; \mathbb{R})$, como espaço vectorial real.

Ex IV.37 (Número de Lebesgue de uma cobertura) Sejam X um espaço métrico compacto e $(U_j)_{j \in J}$ uma família de abertos de X , com união X . Mostrar que existe então $\delta > 0$ tal que, qualquer que seja o subconjunto A de X com diâmetro menor que δ , exista j tal que $A \subset U_j$ (a um número $\delta > 0$ nestas condições dá-se o nome de *número de Lebesgue* da cobertura aberta de X pelos conjunto U_j). **Sugestão:** Supondo que não existia um tal δ , mostrar que se pode escolher, para cada natural n , $x_n \in X$ tal que a bola aberta $B_{1/n}(x_n)$, de centro x_n e raio $1/n$, não esteja contida em nenhum dos U_j e chegar então a um absurdo, examinando o que sucede com um ponto $x \in X$ que seja aderente à sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ex IV.38 (Dois cubos dentro duma esfera) Sejam $n \geq 1$ e $X \subset S^n$ um k -cubo topológico e $Y \subset S^n$ um r -cubo topológico tais que $X \cap Y = \emptyset$. Utilizando a sucessão exacta de Mayer-Vietoris com suporte compacto, mostrar que:

a) Supondo que $n \geq 2$, $H_c^n(S^n \setminus (X \cup Y))$ e $H_c^1(S^n \setminus (X \cup Y))$ têm dimensão 1 e $H_c^p(S^n \setminus (X \cup Y)) = \{0\}$, para cada $p \neq 1, n$, em particular $S^n \setminus (X \cup Y)$ é conexo.

b) Supondo que $n = 1$, $H_c^n(S^n \setminus (X \cup Y))$ é um espaço vectorial de dimensão 2 e $H_c^p(S^n \setminus (X \cup Y)) = \{0\}$, para cada $p \neq n$, em particular $S^n \setminus (X \cup Y)$ tem duas componentes conexas.

Ex IV.39 (**Um cubo dentro de \mathbb{R}^n**) Sejam $n \geq 1$ e $X \subset \mathbb{R}^n$ um k -cubo topológico. Aplicando a conclusão do exercício anterior, com $r = 0$, mostrar que:

- a) Supondo que $n \geq 2$, $H_c^n(\mathbb{R}^n \setminus X)$ e $H_c^1(\mathbb{R}^n \setminus X)$ têm dimensão 1 e $H_c^p(\mathbb{R}^n \setminus X) = \{0\}$, para cada $p \neq 1, n$, em particular $\mathbb{R}^n \setminus X$ é conexo.
 b) Supondo que $n = 1$, $H_c^n(\mathbb{R}^n \setminus X)$ tem dimensão 2 e $H_c^p(\mathbb{R}^n \setminus X) = \{0\}$, para cada $p \neq n$, em particular $\mathbb{R}^n \setminus X$ tem duas componentes conexas.

Ex IV.40 (**Um cubo e uma esfera dentro duma esfera**) Sejam $n \geq 1$, $X \subset S^n$ uma esfera topológica de dimensão $n - 1$ e $Y \subset S^n$ um r -cubo topológico tais que $X \cap Y = \emptyset$. Utilizando a sucessão exacta de Mayer-Vietoris com suporte compacto, mostrar que:

- a) Supondo que $n \geq 2$, $H_c^n(S^n \setminus (X \cup Y))$ e $H_c^1(S^n \setminus (X \cup Y))$ têm dimensões 2 e 1, respectivamente, e $H_c^p(S^n \setminus (X \cup Y)) = \{0\}$, para cada $p \neq 1, n$, em particular $S^n \setminus (X \cup Y)$ tem duas componentes conexas. Além disso, sendo U_1 e U_2 as duas componentes conexas de $S^n \setminus X$, o cubo Y está contido numa delas, por exemplo U_1 , e então as componentes conexas de $S^n \setminus (X \cup Y)$ são $U_1 \setminus Y$ e U_2 .
 b) Supondo que $n = 1$, $H_c^n(S^n \setminus (X \cup Y))$ é um espaço vectorial de dimensão 3 e $H_c^p(S^n \setminus (X \cup Y)) = \{0\}$, para cada $p \neq n$, em particular $S^n \setminus (X \cup Y)$ tem 3 componentes conexas. Além disso, sendo U_1 e U_2 as duas componentes conexas de $S^n \setminus X$, o cubo Y está contido numa delas, por exemplo U_1 , e então $U_1 \setminus Y$ tem duas componentes conexas e estas duas e U_2 são as três componentes conexas de $S^n \setminus (X \cup Y)$.

Ex IV.41 (**Uma esfera dentro de \mathbb{R}^n**) Sejam $n \geq 1$ e $X \subset \mathbb{R}^n$ uma esfera topológica de dimensão $n - 1$. Aplicando a conclusão do exercício anterior, com $r = 0$, mostrar que:

- a) Supondo que $n \geq 2$, $H_c^n(\mathbb{R}^n \setminus X)$ e $H_c^1(\mathbb{R}^n \setminus X)$ têm dimensões 2 e 1, respectivamente, e $H_c^p(\mathbb{R}^n \setminus X) = \{0\}$, para cada $p \neq 1, n$, em particular, $\mathbb{R}^n \setminus X$ tem duas componentes conexas. Além disso, destas duas, uma é limitada e outra não e a fronteira de ambas é igual a X (teorema de Jordan-Brouwer em \mathbb{R}^n).
 b) Supondo que $n = 1$, $H_c^n(\mathbb{R}^n \setminus X)$ tem dimensão 3 e $H_c^p(\mathbb{R}^n \setminus X) = \{0\}$, para cada $p \neq n$, em particular, $\mathbb{R}^n \setminus X$ tem 3 componentes conexas. Além disso, destas três, uma é limitada e as outras duas não e a fronteira da componente limitada é igual a X .⁷⁹

Ex IV.42 Sejam $n \geq 2$ e $X \subset \mathbb{R}^n$ uma esfera topológica de dimensão $n - 1$. O teorema de Jordan-Brouwer em \mathbb{R}^n (já obtido na alínea a) do exercício IV.41), afirma-nos que $\mathbb{R}^n \setminus X$ tem então duas componentes conexas, uma limitada e outra ilimitada, ambas com fronteira igual a X . Apresentar uma demonstração alternativa deste facto por métodos puramente topológicos a partir do correspondente resultado em S^n (cf. IV.6.12). **Sugestão:**

⁷⁹As afirmações sobre as componentes conexas de $\mathbb{R} \setminus X$, quando X é uma esfera topológica de dimensão 0 são de demonstração directa trivial.

Considerar o homeomorfismo, projecção estereográfica, $f_+: S^n \setminus \{e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definido em IV.3.8, e mostrar que, se a um aberto conexo de S^n ($n \geq 2$) se retira um dos seus elementos, obtém-se ainda um aberto conexo.

Ex IV.43 Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ dois subconjuntos arbitrários e $f: X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Mostrar que se tem então $f(\text{int}(X)) = \text{int}(Y)$.

Sugestão: Utilizar o teorema da invariância do domínio de Brouwer.⁸⁰

Ex IV.44 Verificar que, se $n \geq 1$ e $\varphi: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ é um homeomorfismo, então, nas notações de IV.6.3, φ aplica $\partial([0, 1]^n)$ sobre $\partial([0, 1]^n)$. Deduzir que é possível definir, para cada n -cubo topológico X , com $n \geq 1$, o que é o seu *bordo* $\partial(X)$, que este é então uma esfera topológica de dimensão $n - 1$ e que, se X e Y são cubos topológicos de dimensão n e $f: X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $f(\partial(X)) = \partial(Y)$. Mostrar ainda que, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um n -cubo topológico, então $\partial(X)$ coincide com a fronteira topológica de X em \mathbb{R}^n .

Ex IV.45 (**Um lema topológico**) Sejam X um espaço topológico compacto, Y um espaço topológico separado e $\varphi: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e sobrejectiva. Mostrar que, se Z é um espaço topológico, uma aplicação $g: Y \rightarrow Z$ é contínua se, e só se, $g \circ \varphi: X \rightarrow Z$ é contínua.⁸¹

Sugestão: Utilizar a caracterização das aplicações contínuas como aquelas para as quais a imagem recíproca de qualquer fechado é fechada, mostrando que um conjunto $B \subset Y$ é fechado se, e só se, $\varphi^{-1}(B) \subset X$ é fechado.

Ex IV.46 Se X é um espaço topológico, chama-se *caminho de Jordan* em X a uma aplicação contínua $\varphi: [a, b] \rightarrow X$, com $a < b$ em \mathbb{R} , tal que $f(a) = f(b)$ e $f|_{]a,b[}$ seja injectiva.⁸² Mostrar que um espaço topológico X é uma esfera topológica de dimensão 1 se, e só se, for separado e existir um caminho de Jordan sobrejectivo em X . **Sugestão:** Utilizar o exercício anterior, lembrando a aplicação contínua $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow S^1$, definida por $\varphi(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Ex IV.47 a) Seja $n \geq 1$ e consideremos a bola aberta e a bola fechada de \mathbb{R}^n , com a norma euclidiana,

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

$$\overline{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Lembrar que, pelo exercício IV.21, existe um homeomorfismo $\varphi: B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$,

⁸⁰Ao contrário do que possa eventualmente parecer a um leitor mais apressado, este resultado não é uma trivialidade topológica.

⁸¹Este facto costuma ser expresso pela afirmação de que a topologia de Y é a *topologia final* determinada pela topologia de X e pela aplicação φ .

⁸²Por vezes também se usa o nome *curva de Jordan*, mas preferimos aquele porque estamos a dar outro significado à palavra “curva”.

definido por

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \|x\|^2}},$$

e que, por IV.3.8, existe um homeomorfismo $f_+ : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (projectão estereográfica), definido por

$$f_+(x, t) = \frac{x}{1 - t}.$$

Mostrar que existe uma aplicação contínua $f : \overline{B}_1 \rightarrow S^n$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} f_+^{-1}(\varphi(x)), & \text{se } \|x\| < 1 \\ e_{n+1}, & \text{se } \|x\| = 1 \end{cases}.$$

b) Deduzir de a) e do exercício IV.45 que um espaço topológico X é uma esfera topológica de dimensão n se, e só se, é separado e existe uma aplicação contínua sobrejectiva $\overline{B}_1 \rightarrow X$ cuja restrição à hipersuperfície esférica $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ seja constante e cuja restrição à bola B_1 seja injectiva e não sobrejectiva.

c) Verificar que o que se viu em b) implica trivialmente a caracterização mais geral que diz que, dado um cubo topológico Y de dimensão n , com bordo $\partial(Y)$ (cf. o exercício IV.44), um espaço topológico X é uma esfera topológica de dimensão n se, e só se, é separado e existe uma aplicação contínua sobrejectiva $Y \rightarrow X$ cuja restrição a $\partial(Y)$ seja constante e cuja restrição a $Y \setminus \partial(Y)$ seja injectiva e não sobrejectiva.

Ex IV.48 (O problema das três casas e das três lojas) Neste problema clássico, são dadas três casas e três lojas e pretendem-se construir estradas que não se intersectem ligando cada casa a cada loja. Quando se tenta resolver experimentalmente este problema, constata-se que se conseguem traçar oito das estradas mas, ao tentar a nona, isso revela-se impossível (na figura 12, notámos x_1, x_2, x_3 as casas e y_1, y_2, y_3 as lojas e não conseguimos traçar a estrada de x_3 a y_2). O objectivo deste exercício é a prova de que o problema é, efectivamente, impossível de resolver. O problema pode ser colocado no quadro de \mathbb{R}^2 ou de S^2 mas é no quadro de S^2 que é mais cómodo tratá-lo.⁸³

⁸³Aliás, até faz mais sentido colocar o problema no quadro de S^2 , na medida em que nós habitamos na superfície da Terra.

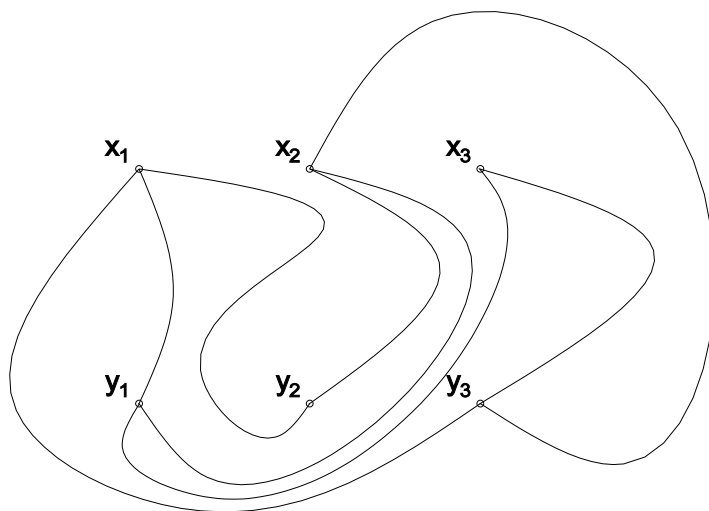


Figura 12

Aliás, pensando na projecção estereográfica, é fácil de constatar que a inexistência de solução no quadro de S^2 arrasta a inexistência de solução no quadro de \mathbb{R}^2 . Podemos então formalizar o enunciado deste exercício do seguinte modo:

São dados seis pontos distintos $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ em S^2 . Mostrar que não existem aplicações contínuas $f_{i,j}: [0, 1] \rightarrow S^2$, onde $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 3$, com $f_{i,j}(0) = x_i$, $f_{i,j}(1) = y_j$, $f_{i,j}([0, 1]) \subset S^2 \setminus \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ e com os conjuntos $f_{i,j}([0, 1])$ disjuntos dois a dois.

Sugestão: Supor que existiam aplicações $f_{i,j}$ nas condições anteriores e tentar chegar a um absurdo seguindo os seguintes passos.

a) Notemos $A_{i,j} = f_{i,j}([0, 1])$ e

$$X = A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup A_{1,3} \cup A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup A_{2,3},$$

$$X_1 = A_{1,2} \cup A_{2,2} \cup A_{2,3} \cup A_{1,3},$$

$$X_2 = A_{1,1} \cup A_{2,1} \cup A_{2,3} \cup A_{1,3},$$

$$X_3 = A_{1,1} \cup A_{2,1} \cup A_{2,2} \cup A_{1,2}$$

(cf. a figura 13 — reparar não estamos ainda a fazer intervir o ponto x_3).
Mostrar que X_1, X_2 e X_3 são esferas topológicas de dimensão 1.

Sugestão: Utilizar o exercício IV.46.

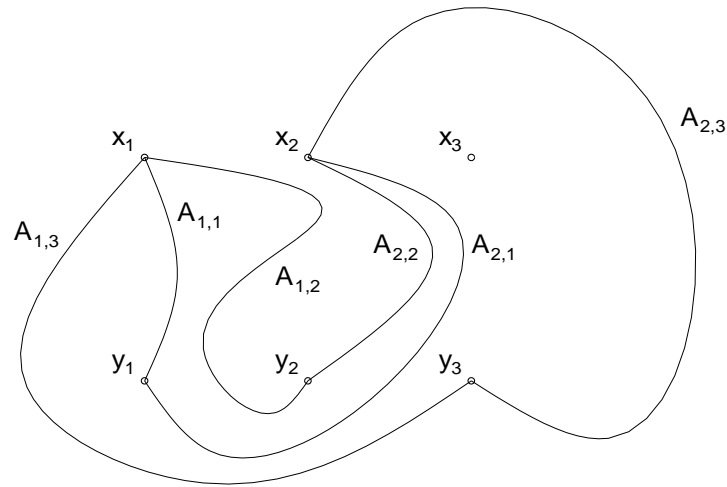


Figura 13

b) Tendo em conta o teorema de Jordan-Brouwer, considerar

- A componente conexa, Y_1 , de $S^2 \setminus X_1$, que não contém y_1 ,
- A componente conexa, Y_2 , de $S^2 \setminus X_2$, que não contém y_2 ,
- A componente conexa, Y_3 , de $S^2 \setminus X_3$, que não contém y_3 .

Verificar que Y_1 , Y_2 e Y_3 estão contidos em $S^2 \setminus X$ e deduzir que estes três abertos são componentes conexas de $S^2 \setminus X$.

c) Mostrar que os três abertos Y_1 , Y_2 e Y_3 são distintos. **Sugestão:** Lembrar que o teorema de Jordan-Brouwer garante que $\text{fr}(Y_j) = X_j$.

d) Utilizar o teorema de Mayer-Vietoris com suporte compacto para mostrar que $H_c^2(S^2 \setminus X)$ tem dimensão 3 e deduzir daqui que $S^2 \setminus X$ tem 3 componentes conexas, e portanto que estas são precisamente Y_1 , Y_2 e Y_3 .

Sugestão: Reparar que X é a união da 1-esfera topológica X_1 com um 1-cubo topológico, cuja intersecção com X_1 é um conjunto com 2 elementos, portanto uma 0-esfera topológica.

e) Sendo Y_j a componente conexa de $S^2 \setminus X$ que contém x_3 , utilizar a aplicação contínua $f_{3,j}: [0, 1] \rightarrow S^2$ para chegar ao absurdo procurado.

Ex IV.49 Verificar que, se formos mais cuidadosos na demonstração de IV.7.4, podemos conseguir que se verifique a condição suplementar $W \cap M = U$ (esta condição não se verifica na situação sugerida na figura 11, que ilustra aquele resultado).

Ex IV.50 Nas condições de IV.7.4, sendo $\iota: U \rightarrow W$ a inclusão, que sabemos verificar $\Phi \circ \iota = Id_U: U \rightarrow U$, mostrar que a aplicação suave $\iota \circ \Phi: W \rightarrow W$ é suavemente homotópica a Id_W , isto é, existe uma aplicação

suave $H: [0, 1] \times W \rightarrow W$ tal que $H(0, y) = \Phi(y)$ e $H(1, y) = y$.

Sugestão: Tomar

$$H(t, y) = \Phi(y) + t(y - \Phi(y)).$$

Ex IV.51 Deduzir do exercício IV.50 que, se $M \subset E$ é uma variedade compacta e sem bordo, então existe um aberto W de E , com $M \subset W$, tal que, sendo $\iota: M \rightarrow W$ a inclusão, cada $H^p(\iota): H^p(W) \rightarrow H^p(M)$ é um isomorfismo.

Ex IV.52 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$, B a bola fechada,

$$B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\},$$

e $S \subset B$ a hipersuperfície esférica,

$$S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}.$$

Verificou-se em III.8.7 que não existe nenhuma aplicação contínua $f: B \rightarrow S$ tal que $f(x) = x$, para cada $x \in S$ (uma retracção contínua de B sobre S). Redemonstrar este resultado utilizando IV.7.10 e o facto de $H^{n-1}(B)$ ter dimensão inferior à de $H^{n-1}(S)$.

Ex IV.53 Seja E um espaço euclidiano de dimensão ímpar $n \geq 3$ e seja $S \subset E$ a hipersuperfície esférica unitária, $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Seja $f: S \rightarrow S$ a aplicação suave definida por $f(x) = -x$.

a) Mostrar que $H^{n-1}(S)$ é um espaço vectorial de dimensão 1 e que a aplicação linear $H^{n-1}(f): H^{n-1}(S) \rightarrow H^{n-1}(S)$ é a multiplicação por -1 .

Sugestão: Verificar que, quando se considera em S a orientação usual, f inverte as orientações e lembrar o isomorfismo $\int: H^{n-1}(S) \rightarrow \mathbb{K}$.

b) Utilizar IV.7.9 para deduzir que a aplicação $f: S \rightarrow S$ não é homotópica a $Id_S: S \rightarrow S$ e proceder então como na demonstração de III.8.9 para redemonstrar que, para cada aplicação contínua $X: S \rightarrow E$, existe $x \in S$ tal que $X(x) \in \mathbb{R}x$ (teorema da esfera despenteada).⁸⁴

Ex IV.54 Sejam E um espaço euclidiano e $M \subset E$ uma variedade de dimensão m , compacta, orientável e não vazia. Verificou-se em III.8.3 que não existe nenhuma retracção suave de M sobre o bordo $\partial_1(M)$. Mostrar que não existe mesmo nenhuma retracção contínua de M sobre $\partial_1(M)$.

Sugestão: Supor que existia uma tal retracção contínua $f: M \rightarrow \partial_1(M)$. Começar por mostrar que $\partial_1(M)$ é fechado em M . Considerar então uma vizinhança tubular da variedade compacta, sem bordo, $\partial_1(M)$ e ter em conta o teorema de aproximação III.8.6 para construir uma retracção suave de M sobre $\partial_1(M)$.

⁸⁴As conclusões desta alínea são também trivialmente válidas para $n = 1$.

Ex IV.55 (**Fibrados vectoriais de dimensão 1**) Sejam M uma variedade conexa e não vazia⁸⁵, E um espaço euclidiano e $(E_x)_{x \in M}$ um fibrado vectorial de dimensão 1, com $E_x \subset E$. Para cada $x \in M$, seja $S_x \subset E_x$ o conjunto dos $w \in E_x$ tais que $\|w\| = 1$, conjunto que tem portanto dois elementos. Seja $\underline{S} \subset M \times E$,

$$\underline{S} = \{(x, w) \in M \times E \mid w \in S_x\}.$$

a) Mostrar que, se o fibrado vectorial $(E_x)_{x \in M}$ é trivial, então \underline{S} é difeomorfo a $M \times \{-1, 1\}$, em particular \underline{S} tem duas componentes conexas, cada uma das quais intersectando cada $\{x\} \times S_x$.

Sugestão: Mostrar que existe uma secção suave $(W_x)_{x \in M}$ do fibrado vectorial, tal que, para cada $x \in M$, $\|W_x\| = 1$.

b) Mostrar que, se o fibrado vectorial $(E_x)_{x \in M}$ não é trivial, então \underline{S} é conexo.

Sugestão: Supor que \underline{S} não é conexo e considerar dois abertos disjuntos não vazios U e V de \underline{S} , com união \underline{S} . Mostrar que M fica união disjunta dos três abertos M_1 , M_2 e M_3 constituídos, respectivamente, pelos pontos x tais que $\{x\} \times S_x \subset U$, pelos pontos x tais que $\{x\} \times S_x \subset V$ e pelos pontos x tais que $\{x\} \times S_x$ tem um ponto em U e um ponto em V , e deduzir, do facto de M ser conexa, que $M = M_3$. Para mostrar que estes conjuntos são abertos, atender a que, tendo em conta a), para cada $x_0 \in M$, existe um aberto A de M , com $x_0 \in A$, tal que $\underline{S}_{/A} = \{(x, w) \in \underline{S} \mid x \in A\}$ tenha duas componentes conexas, cada uma das quais intersectando cada $\{x\} \times S_x$. Mostrar que se obtém então uma secção suave $(W_x)_{x \in M}$ do fibrado vectorial, pela condição de se ter $W_x \in S_x$ e $(x, W_x) \in U$.

Ex IV.56 Sejam E um espaço euclidiano de dimensão $n \geq 1$ e $M \subset E$ uma variedade de dimensão $n - 1$, compacta, conexa, sem bordo e não vazia. Seja $W \supset M$ uma vizinhança tubular de M , correspondente a um certo $r > 0$ (cf. IV.7.5).

a) Considerar o fibrado vectorial de dimensão 1, de base M , que a cada $x \in M$ associa $T_x(M)^\perp$, lembrando que a variedade M é orientável se, e só se, este fibrado vectorial é trivial. Nas notações do exercício IV.55, mostrar que tem lugar um difeomorfismo de $\underline{S} \times]0, r[$ sobre $W \setminus M$, definido por

$$((x, w), t) \mapsto x + tw,$$

e deduzir que $W \setminus M$ tem duas componentes conexas, se a variedade M é orientável, e $W \setminus M$ é conexo, se a variedade M não é orientável.

b) Verificar que o aberto W é sempre conexo. **Sugestão:** Verificar que W é união do conexo M com uma família de conexos intersectando M , um para cada $x \in M$.

c) Utilizar a sucessão exacta de Mayer-Vietoris com suporte compacto,

⁸⁵ou, mais geralmente um subconjunto conexo e não vazio de um espaço vectorial de dimensão finita.

relativamente à decomposição de E como união dos abertos W e $E \setminus M$, cuja intersecção é $W \setminus M$, lembrando que $H_c^{n-1}(E) = \{0\}$, para deduzir que, se M for orientável, $E \setminus M$ tem duas componentes conexas e, se M não for orientável, $E \setminus M$ é conexo. **Nota:** Usando técnicas diferentes das que temos vindo a estudar, por exemplo o grau módulo 2 (cf. o capítulo 2, §5 de [8]), pode-se provar que, sob as hipóteses deste exercício, $E \setminus M$ tem sempre pelo menos duas componentes conexas. Na posse desse resultado, este exercício permitir-nos-ia concluir que toda a subvariedade compacta, conexa, sem bordo e de dimensão $n - 1$ de um espaço vectorial de dimensão n é orientável.⁸⁶

⁸⁶A hipótese de a subvariedade ser conexa é claramente dispensável, uma vez que podemos sempre aplicar a conclusão a cada uma das componentes conexas desta.

Índice de Símbolos

$\mu_f(A)$	1
$\mu_n(A)$	2
c_ξ	2, 3
$\mu_E(A)$	3
$\langle (x, y), (x', y') \rangle$	4
$g_{i,j}$	5
$\mu_M(A)$	9
$S = \{x \in E \mid \ x\ = 1\}$	18
$\varphi:]0, +\infty[\times S \rightarrow E \setminus \{0\}$	18
σ_n	19
S_r, B_r	20
$ang(C)$	28
$bar(M)$	29
\mathbb{K}	37
\overline{E}	38
$L^p(E; F)$	39
$L(E; F)$	39
$L^0(E; F) = F$	40
$L_{\mathbb{R}}^p(E; F)$	40
$L_{\mathbb{C}}^p(E; F)$	40
$\xi_{j_1, \dots, j_p}: E^p \rightarrow \mathbb{K}'$	41
$\beta: E \rightarrow L(L(E; \mathbb{K}); \mathbb{K})$	43
$\xi \otimes \eta: E^{p+q} \rightarrow \mathbb{K}'$	43
$\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \dots \otimes \lambda_k \in L^{p_1+p_2+\dots+p_k}(E; \mathbb{K}')$	44
$\lambda^*(\xi), \lambda^*: L^p(F; \mathbb{K}') \rightarrow L^p(E; \mathbb{K}')$	44
$\xi_{/E}$	45
\mathfrak{S}_n	45
$\text{inv}(\sigma)$	45, 46
$\text{sg}(\sigma)$	45, 46
$(j \cdot k)$	45
$\text{sg}(J)$	47
$\widehat{\sigma}(\xi), \widehat{\sigma}: L^p(E; \mathbb{K}') \rightarrow L^p(E; \mathbb{K}')$	48
$A^p(E; F)$	49
$S^p(E; F)$	49
$\text{Alt}(\xi), \text{Alt}: L^p(E; F) \rightarrow A^p(E; F)$	50
$\text{Sym}(\xi), \text{Sym}: L^p(E; F) \rightarrow S^p(E; F)$	51
$\xi_{\wedge j_1, \dots, j_p} \in A^p(E; \mathbb{K}')$	52
$\det \in A^m(\mathbb{K}^m; \mathbb{K})$	54
$\det(\lambda)$	55

$\xi \wedge \eta \in A^{p+q}(E; \mathbb{K}')$	57
$\xi \odot \eta \in S^{p+q}(E; \mathbb{K}')$	58
$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_n \in A^{p_1+\cdots+p_n}(E; \mathbb{K}')$	60
$\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n \in S^{p_1+\cdots+p_n}(E; \mathbb{K}')$	61
$\text{int}_x(\xi), \text{int}_x: L^p(E; F) \rightarrow L^{p-1}(E; F)$	64
$\tau_j \in \mathfrak{S}_p$	64
$\alpha(x_1, \dots, x_n)$	68
$\text{sg}(x), \text{sg}: E \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$	69
$\text{sg}(\lambda)$	71
$\text{Vol}_E \in A^n(E; \mathbb{R})$	79
$\theta: E \rightarrow L(E; \mathbb{R})$	80
$*\xi, *: A^p(E; \mathbb{K}) \rightarrow A^{n-p}(E; \mathbb{K})$	81
$\hat{\theta}: E \rightarrow A^{n-1}(E; \mathbb{R})$	86
$x_1 \times \cdots \times x_{n-1}$	87
$\det_{\mathbb{C}}(\lambda)$	91
$\det_{\mathbb{R}}(\lambda)$	91
$\text{tr}(C)$	91
$\text{tr}(\lambda)$	91
$\text{tr}_{\mathbb{C}}(\lambda) \in \mathbb{C}$	91
$\text{tr}_{\mathbb{R}}(\lambda) \in \mathbb{R}$	91
$\xi = (\xi_x)_{x \in M}$	99
$f^*\xi = (Df_x^*(\xi_{f(x)}))_{x \in \hat{M}}$	102
$\xi_{/\hat{M}}$	102
$\theta(X), \theta^{-1}(\omega)$	105
$Df = (Df_x)_{x \in M}$	106
$\text{grad}(f) = \theta^{-1}(Df)$	106
$\text{Vol} = (\text{Vol}_x)_{x \in M}$	106
$[X, Y]$	107
$d\omega$	107
$\text{div}(X)$	115
Δf	116
$\text{rot}(X)$	116
$\mathcal{L}_X(\xi)$	120
$\text{int}_X(\xi) = (\text{int}_{X_x}(\xi_x))_{x \in M}$	128
$\int_M \omega, \int \omega$	131
Z_x	141
W_x	142
$P\omega = (P\omega_x)_{x \in M}$	144
$\varphi_0, \varphi_1: M \rightarrow [0, 1] \times M$	145
$B = \{x \in E \mid \ x\ \leq 1\}$	150
$\int_{(A,f)} \omega = \int_A f^*\omega, \int_f \omega$	156
$\rho: E \setminus \{0\} \rightarrow S$	164
$\Omega: E \setminus \{0\} \rightarrow A^{n-1}(E; \mathbb{R})$	164
$\angle(A, f) = \int_{(A,f)} \Omega, \angle(f)$	164

$\angle(A)$	164
$\frac{\partial}{\partial \varphi_j}$	170
$\frac{\partial}{\partial x_j}$	171
$dz = dx + i dy, d\bar{z} = dx - i dy$	171
$\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$	171
$\omega: \Omega \rightarrow M$	175
$\varphi_s: U_s \rightarrow U_{-s}$	175
$\mathcal{L}_X(Y)$	176
$\frac{\partial f}{\partial n}$	179
$\bar{B}_t(a), S_t(a)$	179
$\gamma: L_{-aa}(F; F) \rightarrow A^2(F; \mathbb{R})$	183
$\text{rot}(X)$	183
$\nabla X_x: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$	183
$x \times y \in L_{-aa}(F; F)$	183
$ad: F \rightarrow L_{-aa}(F; F)$	184
$\angle_y(A, f), \angle_y(f), \angle_y(A)$	190, 192
$\Omega_{\mathbb{K}}^p(M), \Omega^p(M; \mathbb{K})$	195
$d^p: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$	195
$C^\bullet = (C^p)_{p \in \mathbb{Z}}$	195
$Z^p(C^\bullet), B^p(C^\bullet)$	195
$H^p(C^\bullet) = \frac{Z^p(C^\bullet)}{B^p(C^\bullet)}$	196
$[x] \in H^p(C^\bullet)$	196
$\Omega_{\mathbb{K}}^\bullet(M)$	196
$Z_{\mathbb{K}}^p(M), B_{\mathbb{K}}^p(M)$	196
$H_{\mathbb{K}}^p(M) = \frac{Z_{\mathbb{K}}^p(M)}{B_{\mathbb{K}}^p(M)}$	196
$\lambda^\bullet = (\lambda^p)_{p \in \mathbb{Z}}$	198
$H^p(\lambda^\bullet): H^p(C^\bullet) \rightarrow H^p(C'^\bullet)$	198
$\partial^p: H^p(C''^\bullet) \rightarrow H^{p+1}(C^\bullet)$	214
$\Omega^\bullet(U) \times \Omega^\bullet(V)$	217
$\lambda^p: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(U) \times \Omega^p(V)$	217
$\mu^p: \Omega^p(U) \times \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^p(U \cap V)$	217
$f_+, f_-: S^{n-1} \setminus \{e_n\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$	220
$g_+, g_-: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \setminus \{e_n\}$	220
$f: H^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$	220
$\Omega_c^p(M)$	225
$\Omega_c^\bullet(M)$	225
$Z_c^p(M), B_c^p(M), H_c^p(M)$	225
$H_c^p(f): H_c^p(M) \rightarrow H_c^p(M')$	227
$\omega_{\setminus M}$	227
$f: H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{K}$	230
$\xi^p: H^p(M) \times H_c^{m-p}(M) \rightarrow \mathbb{K}$	236
$\mu^p: \Omega_c^p(U \cap V) \rightarrow \Omega_c^p(U) \times \Omega_c^p(V)$	241
$\lambda^p: \Omega_c^p(U) \times \Omega_c^p(V) \rightarrow \Omega_c^p(M)$	241

\mathcal{U}_f
 \mathcal{U}_s 248
248

Índice Remissivo

alternada (aplicação multilinear)	49	contável	247
ângulo	28	continuamente homotópica	193
ângulo sólido	28	contráctil (suavemente)	147
ângulo sólido (forma diferencial)	164	coordenadas polares generalizadas	19
ângulo sólido orientado	164, 164, 190, 192	crítico (ponto)	21, 34
anti-holomorfa (aplicação)	172	crítico (valor)	21, 34
antilinear (aplicação)	39	cubo topológico	251
anti-simétrica (aplicação multilinear)	49	de Rham (cohomologia)	196, 225
aplicação fechada	274	de Rham (complexo)	196, 225
aplicação linear de conexão	214	decomponível (tensor)	92
aplicação de Poincaré	236	derivada covariante	183
aplicação própria	226	derivada exterior	107
base associada	42	derivada de Lie	120
baricentro	29	derivada normal	179
base de abertos	247	determinante (função)	54
base directa	68	determinante de aplicação linear	55
base negativa	68	diagrama comutativo	78, 198
base positiva	68	directa (base)	68
base retrógrada	68	divergência	115
Bézout (teorema de)	46	divergência (teorema da)	141
bidual	43	dual (espaço)	234, 234
bordo de cubo topológico	285	dual (aplicação linear)	44
boreliano pequeno	8	dual de Poincaré	279
Brouwer (teorema de)	153, 260	elemento de volume	79, 106
caminho	158	esfera depenteada (teorema)	154
caminho de Jordan	286	esfera topológica	251
campo vectorial	105	espaço de cohomologia	196
campo vectorial de Killing	176	espaço topológico homogéneo	258
campos vectoriais f -relacionados	125	espaço vectorial orientado	68
campo tensorial	99	essencialmente finita (família)	205
campo tensorial suave	99	estereográfica (projectção)	32, 182
Cauchy (fórmula integral de)	181	estrutura complexa	38
central (projectção)	31	exacta (forma diferencial)	148, 196
centro de figura	29	extensão trivial	227
cobordo	195, 195	fechada (forma diferencial)	148, 196
cociclo	195	σ -finito	13
coeficiente de dilatação	2, 3	fluxo	175
cohomologia de de Rham	196	forma diferencial	101
complexificado	282, 283	forma diferencial ângulo sólido	164
complexo de cocadeias	195	forma diferencial exacta	148, 196
complexo de cocadeias produto	204	forma diferencial fechada	148, 196
complexo de cocadeias soma	210	forma diferencial integrável	131, 156
complexo de de Rham	196	fórmula integral de Cauchy	181
conjugado (espaço vectorial)	38	fórmula de Green	179
conjunto de revolução	30	função determinante	54
conjunto total	7	função harmónica	175, 179
conserva as orientações	71, 131	gradiente	106

gráfico	28	orientação canónica	69, 94
Green (fórmula de)	179	orientação induzida	77, 134
Green (teorema de)	178	orientação negativa	69
grupo de Lie	34	orientação positiva	69
grupo simétrico	45	orientação produto	76
harmónica (função)	175, 179	orientação transversa	77
holomorfa (aplicação)	172	orientação transversa canónica	134
homogéneo (espaço topológico)	258	orientações compatíveis	74
homotopia contínua	261	Pappus (teorema de)	31
homotopia suave	147	par bola-esfera topológico	185
homotopia suave própria	275	parêntesis de Lie	107
homotópica (continuamente)	193, 261	paridade	45, 47
homotópica (suavemente)	147	pequeno (boreliano)	8
i-base de abertos	247	Poincaré (lema de)	148
identidade de Jacobi	176	Poincaré (teorema de dualidade)	249
imagem recíproca	44, 102	Poincaré (variedade)	237
injecções associadas	206	ponto crítico	21, 34
injecções canónicas	228	ponto regular	21, 34
integral de forma diferencial	131	positiva (base)	68
integrável (forma diferencial)	131, 156	positivamente relacionadas	67
inverte as orientações	71, 131	prismático (operador)	145
isometria	16	produto de aplicações lineares	270
isomorfismo canónico	80	produto de espaços vectoriais	202
isomorfismo de compl. de cocadeias	198	produto exterior	57
isomorfismo negativo	71	produto externo	87
isomorfismo positivo	71	produto externo alternativo	183
Jacobi (identidade de)	176	produto interior	64
Jordan (caminho)	286	produto tensorial	43
Jordan-Brouwer (teorema)	255, 258	projecção central	31
Killing (campo vectorial)	176	projecção estereográfica	32, 182, 218, 220
laplaciano	115	projecções associadas	207
Lebesgue (medida de)	3, 10	prolongamento euclidiano	101
lema dos cinco	96, 240	prolongamento suave	99
lema de Poincaré	148	propriedade da média	179
lema da serpente	214	regular (ponto)	21, 34
Lie (derivada de)	120	regular (valor)	21, 34
Lie (grupo de)	34	f -relacionados (campos vectoriais)	125
Lie (parêntesis de)	107	restrição de campo tensorial	102
localmente fechado	22	retracção	149
Mayer-Vietoris (sucessão exacta)	218, 242	retrógrada (base)	68
medida de contagem	11	rotacional	116
medida de Lebesgue	3, 10	rotacional alternativo	183
módulo homotopia suave	268	Sard (teorema de)	23, 34
morfismo de complexos de cocadeias	198	semi-espaço	77
negativa (base)	68	semi-espaço negativo	77
negativamente relacionadas	67	semi-espaço positivo	77
normal unitária exterior	141	simétrica (aplicação multilinear)	49
normal unitária positiva	140, 142	sinal	45, 46, 47
número de inversões	45, 46	sinal de isomorfismo	71
número de Lebesgue	284	sistema compatível de orientações	78
operador de cobordo	195	soma de espaços vectoriais	206
operador prismático	145	soma de aplicações lineares	271
orientação	68	Stokes (teorema de)	138, 142, 158
orientação associada	69	suave (campo tensorial)	99

suavemente contráctil	147, 201	teorema de Sard	23, 34
suavemente homotópica	147, 160	teorema de Stokes	138
subespaço associado	93	teorema de Stokes clássico	142
sucessão exacta	72, 72	teorema de Stokes singular	158
sucessão exacta de cohomologia	214	teorema da variedade esburacada	161
sucessão exacta curta	73, 213	total (conjunto)	7
suporte compacto	133, 225	traço	91, 91
tangente unitária positiva	142	trajectória	158
tensor	43	tranposição	45
tensor covariante	43	transposição consecutiva	45
tensor decomponível	92	valor crítico	21, 34
teorema de Bézout	46	valor regular	21, 34
teorema de Brouwer	153, 260	variedade esburacada (teorema)	161
teorema da divergência	141	variedade de Poincaré	237
teorema de dualidade de Poincaré	249	variedade singular	156
teorema da esfera despenteada	154	vector directo	69
teorema fundamental da Álgebra	189, 277	vector negativo	69
teorema de Green	178	vector positivo	69
teorema de invariância da dimensão	258	vector retrógrado	69
teorema de invariância do domínio	260	vector unitário positivo	79
teorema de Jordan-Brouwer	255, 258	vizinhança tubular	263, 265
teorema de Pappus	31		

Bibliografia

- [1] BERGER, GAUDUCHON, MAZET, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Springer, Lecture Notes, 194, 1971.
- [2] BERGER M., GOSTIAUX B., *Géométrie Différentielle*, Armand Colin, Paris, 1982.
- [3] BOTT R., TU L.W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, GTM 82, 1982.
- [4] DIEUDONNÉ, J., *Eléments d'Analyse*, Vol III, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
- [5] GODBILLON C., *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
- [6] GODBILLON C., *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*, Hermann, Paris, 1969.
- [7] GREUB W., HALPERIN S., VANSTONE R., *Connections Curvature and Cohomology*, Vol I, Academic Press, 1972.
- [8] GUILLEMIN V., POLLAK A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [9] LANG S., *Analysis II (Real Analysis numa edição posterior)*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [10] MACHADO A., *Geometria Diferencial—Uma Introdução Fundamental*, Cosmos, Lisboa, 1991.
- [11] MACHADO A., *Medida e Integração*, Textos e Notas do CMAF, 3, Lisboa, 1976
- [12] MACHADO A., *Tópicos de Álgebra Linear e Multilinear*, Textos e Notas do CMAF, 42, Lisboa, 1990.
- [13] MACHADO A., *Tópicos de Análise e Geometria*, Vol I e II, Textos e Notas do CMAF, 7 e 14, Lisboa, 1977 e 1978.
- [14] MARCO, G., Fibrations of real valued functions, *Nonlinear Analysis, Theory Methods & Applications* Vol. 28, No. 10, 1997.
- [15] MILNOR, J., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [16] RUDIN, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1974.
- [17] SPIVAK, M., *Calculus on Manifolds*, Benjamin, Menlo Park, 1965.

- [18] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol I e II, Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [19] WARNER F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott and Foresman, 1971.
- [20] WHITNEY, A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. Jour.* 1, 1935, pp. 514–517.